Lösningsförslag. Linjär analys. Tentamen 2014-11-03

Anders Olofsson

Uppgift 1. Potensserien har konvergensradie $\rho = 1$. Seriens summa är

$$k(x) = x/(1-x)^2$$

för $|x| < 1$. $\square$

Uppgift 2. Vi beräknar Fourier-serieutvecklingen av funktionen

$$g(x) = 1 + \sin^3(x), \quad x \in \mathbb{R}.$$

Genom användande av välkända trigonometriska formler och binomialsats har vi att

$$\begin{aligned} g(x) &= 1 + \left(\frac{e^{ix} - e^{-ix}}{2i}\right)^3 \\ &= -\frac{i}{8}e^{-3ix} + \frac{3i}{8}e^{-ix} + 1 - \frac{3i}{8}e^{ix} + \frac{i}{8}e^{3ix}. \end{aligned}$$

En tillämpning av Parseval-identiteten ger nu att

$$\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} g(x)^2 dx = \frac{1}{64} + \frac{9}{64} + 1 + \frac{9}{64} + \frac{1}{64} = \frac{21}{16}.$$

Den sökta integralen har värdet

$$\int_0^{2\pi} g(x)^2 dx = \frac{21\pi}{8}.$$

$\square$

Uppgift 3. Funktionen f har Fourierserie-utveckling

$$f(t) \sim \frac{\sinh(\pi)}{\pi} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{(-1)^n}{1-in} e^{int}$$

på intervallet $(-\pi, \pi)$. $\square$

Uppgift 4. Enligt sk d'Alembert lösningsformel för 1-dimensionell vågekvation vet vi en lösning u för vår vågekvation kan skrivas på formen

$$u(x,t) = f(x+t) + g(x-t)$$

för några funktioner f och g. Begynnelsevillkoren ger i vårt fall att

$$u(x,t) = \frac{1}{2}\sin(x+t) - \frac{1}{4}\cos(2(x+t)) + \frac{1}{2}\sin(x-t) + \frac{1}{4}\cos(2(x-t)).$$

Genom användning av additionsformler för sinus och kosinus förenklas denna formel till

$$u(x,t) = \sin(x)\cos(t) + \frac{1}{2}\sin(2x)\sin(2t).$$

$\square$

Uppgift 5. Enligt formel för dubbelvinkel för kosinus har vi att

$$\int_0^1 \frac{\sin^2(nx)}{x^2+1}dx = \frac{1}{2}\int_0^1 \frac{dx}{x^2+1} - \frac{1}{2}\int_0^1 \frac{\cos(2nx)}{x^2+1}dx.$$

En tillämpning av Riemann-Lebesgues lemma ger nu att

$$\lim_{n\to\infty}\int_0^1 \frac{\sin^2(nx)}{x^2+1}dx = \frac{1}{2}\int_0^1 \frac{dx}{x^2+1} = \frac{\arctan(1)}{2} = \frac{\pi}{8}.$$

□

Uppgift 6. För $x \geq d > 0$ har vi att

$$0 \leq f_n(x) \leq ne^{-nd} \to 0$$

då $n \to \infty$ enligt kända egenskaper hos exponential-funktionen. Detta visar att funktionsföljden $\{f_n\}_{n=1}^\infty$ konvergerar mot noll likformigt på varje intervall (d,∞) med $d > 0$. Att konvergensen inte är likformig på $(0,\infty)$ följer av observationen att $\sup_{x>0} f_n(x) = n$.

Notera att $\int_0^\infty f_n(x)dx = 1$ för varje n och att massan under grafen $y = f_n(x)$ alltmer koncentreras till små värden på x när parametern n blir stor (figur). En rimlig gissning är därför att

$$\lim_{n\to\infty}\int_0^\infty \varphi(x)f_n(x)dx = \varphi(0)$$

för varje rimlig klass av testfunktioner φ sådan att formeln är meningsfull. Detta är också fallet vilket används flitigt i olika sammanhang. I vårt fall har vi testfunktionen

$$\varphi(x) = \begin{cases} 7 + x^{100} & \text{för } 0 \leq x < 1, \\ 0 \quad \text{annars.} \end{cases}$$

Låt oss återgå till uppgiften. Variabelbytet $t = nx$ ger att

$$\int_0^1 (7+x^{100})f_n(x)dx = \int_0^n (7+n^{-100}t^{100})e^{-t}dt = 7\int_0^n e^{-t}dt + n^{-100}\int_0^n t^{100}e^{-t}dt.$$

Integralen $\int_0^n e^{-t}dt$ konvergerar mot $\int_0^\infty e^{-t}dt = 1$ då $n \to \infty$. Då $n \to \infty$ gäller också att integralen $\int_0^n t^{100}e^{-t}dt$ konvergerar mot $\int_0^\infty t^{100}e^{-t}dt$ som är konvergent, dvs $\int_0^\infty t^{100}e^{-t}dt < \infty$. Alltså

$$\lim_{n\to\infty}\int_0^1 (7+x^{100})f_n(x)dx = 7.$$

Det följer fö av detta integral-gränsvärde att $\{f_n\}_{n=1}^\infty$ inte är likformigt konvergent på positiva halvaxeln $(0,\infty)$. □