Lineär analys
Fredag den 30 maj 2014
Skrivtid: 8.00–13.00

Lösningar

1. **a)** $a_k = k!$ ger att $\left|\dfrac{a_{k+1}}{a_k}\right| = k+1 \to \infty$ då $k \to \infty$. Konvergensradien är 0.

b) $\dfrac{\binom{2k+2}{k+1}}{\binom{2k}{k}} = \dfrac{(2k+2)(2k+1)}{(k+1)^2} \to 4$ då $k \to \infty$. Konvergensradien är $\dfrac{1}{4}$.

c) $\dfrac{(k+1)^3/3^{k+1}}{k^3/3^k} = \dfrac{1}{3} \cdot \left(1 + \dfrac{1}{k}\right)^3 \to \dfrac{1}{3}$ då $k \to \infty$. Konvergensradien är 3.

d) Serien kan skrivas $\sum_{k=0}^{\infty} b_k t^k$, där $t = x^2$ och

$$b_k = \frac{1}{2^k + k^2}.$$

Det gäller att

$$\left|\frac{b_{k+1}}{b_k}\right| = \frac{2^k + k^2}{2^{k+1} + (k+1)^2} = \frac{1 + k^2/2^k}{2 + (k+1)^2/2^k} \to \frac{1}{2} \quad \text{då} \quad k \to \infty.$$

Serien $\sum_{k=0}^{\infty} b_k t^k$ har därför konvergensradien 2, vilket betyder att den är konvergent då $t = x^2 < 2$ och divergent då $t = x^2 > 2$. Det följer att den ursprungliga potensserien är konvergent då $|x| < \sqrt{2}$ och divergent då $|x| > \sqrt{2}$. Dess konvergensradie är därför $\sqrt{2}$.

2. Vi utvecklar $f(x) = x$ i cosinusserie. Då $n = 0$ är

$$a_n = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} x \, dx = \pi,$$

och då $n > 0$ är

$$a_n = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} x \cos nx \, dx = \frac{2}{\pi} \left(\left[\frac{x}{n} \sin nx \right]_0^{\pi} - \int_0^{\pi} \frac{1}{n} \sin nx \, dx \right) = -\frac{2}{n\pi} \int_0^{\pi} \sin nx \, dx$$
$$= \frac{2}{n^2\pi} [\cos nx]_0^{\pi} = \frac{2((-1)^n - 1)}{n^2\pi} = \begin{cases} -\frac{4}{(2k+1)^2\pi}, & n = 2k+1, \\ 0, & n = 2k. \end{cases}$$

Det gäller därför att

$$u(x,t) = \frac{\pi}{2} - \frac{4}{\pi} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{e^{-3(2k+1)^2 t} \cos((2k+1)x)}{(2k+1)^2}.$$

Var god vänd!

3. Fourierkoefficienterna ges av

$$
\begin{aligned}
c_n &= \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\left(\cos\frac{x}{2}\right)e^{-inx}\,dx = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\frac{e^{\frac{ix}{2}}+e^{-\frac{ix}{2}}}{2}\cdot e^{-inx}\,dx \\
&= \frac{1}{4\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\left(e^{ix\left(\frac{1}{2}-n\right)}+e^{-ix\left(\frac{1}{2}+n\right)}\right)dx = \frac{1}{4\pi}\left[\frac{e^{ix\left(\frac{1}{2}-n\right)}}{i\left(\frac{1}{2}-n\right)}-\frac{e^{-ix\left(\frac{1}{2}+n\right)}}{i\left(\frac{1}{2}+n\right)}\right]_{-\pi}^{\pi} \\
&= \frac{1}{2\pi}\left[e^{-inx}\left(\frac{e^{\frac{ix}{2}}}{i\,(1-2n)}-\frac{e^{-\frac{ix}{2}}}{i\,(1+2n)}\right)\right]_{-\pi}^{\pi} = \frac{(-1)^n}{2\pi}\left(\frac{2i}{i(1-2n)}+\frac{2i}{i(1+2n)}\right) \\
&= \frac{2(-1)^n}{\pi(1-4n^2)}.
\end{aligned}
$$

Fourierserien blir därför

$$\frac{2}{\pi}\sum_{n=-\infty}^{\infty}\frac{(-1)^n}{1-4n^2}e^{inx}.$$

Enligt Parsevals formel är

$$\frac{4}{\pi^2}\sum_{n=-\infty}^{\infty}\frac{1}{(1-4n^2)^2} = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\cos^2\frac{x}{2}\,dx = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\frac{1+\cos x}{2}\,dx = \frac{1}{2},$$

vilket ger att

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty}\frac{1}{(1-4n^2)^2} = \frac{\pi^2}{8}.$$

Det följer att

$$2\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{(1-4n^2)^2} = 1+\sum_{n=-\infty}^{\infty}\frac{1}{(1-4n^2)^2} = 1+\frac{\pi^2}{8},$$

varav

$$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{(1-4n^2)^2} = \frac{1}{2}+\frac{\pi^2}{16}.$$

4. Vi ser att $f_n(0) = 0 \to 0$ då $n \to \infty$. Då $x > 0$, gäller det att

$$f_n(x) = \frac{x}{\frac{2}{n}+x^2} \to \frac{1}{x} \quad \text{då} \quad n \to \infty.$$

Följden konvergerar alltså punktvis mot funktionen f definierad genom

$$f(x) = \begin{cases} 0, & x = 0, \\ \frac{1}{x}, & x > 0. \end{cases}$$

Eftersom funktionerna f_n är kontinuerliga och f är diskontinuerlig i $[0,1]$, är inte konvergensen likformig i $[0,1]$. Då $x \geq 1$, gäller det att

$$|f_n(x) - f(x)| = \left|\frac{nx}{2+nx^2}-\frac{1}{x}\right| = \frac{2}{(2+nx^2)x} \leq \frac{2}{n}.$$

Det följer att $||f_n - f||_{[1,\infty)} \leq \frac{2}{n} \to 0$ då $n \to \infty$, varför konvergensen är likformig i $[1,\infty)$.

5. Antag att $u(x) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k x^k$, där potensserien har en positiv konvergensradie R. Om $|x| < R$, gäller det då att

$$u'(x) = \sum_{k=1}^{\infty} k a_k x^{k-1}, \quad u''(x) = \sum_{k=2}^{\infty} k(k-1) a_k x^{k-2}.$$

Att u är en lösning till differentialekvationen betyder därför att

$$\sum_{k=2}^{\infty} k(k-1) a_k x^{k-1} - 2 \sum_{k=1}^{\infty} k a_k x^{k-1} + \sum_{k=0}^{\infty} a_k x^{k+1} = 0, \quad |x| < R.$$

Den konstanta termen i vänsterledet är $-2a_1$. Därför är $a_1 = 0$ och vi kan skriva vänsterledet

$$\sum_{k=2}^{\infty} k(k-3) a_k x^{k-1} + \sum_{k=0}^{\infty} a_k x^{k+1}.$$

Ersätter vi nu k med $k+2$ i den första summan, blir ekvationen

$$\sum_{k=0}^{\infty} ((k+2)(k-1) a_{k+2} + a_k) x^{k+1} = 0.$$

Då $k \neq 1$, skall det därför gälla att

$$a_{k+2} = -\frac{a_k}{(k+2)(k-1)}.$$

Man inser att $a_0 = A$ och $a_3 = B$ kan väljas fritt, och vi har sett att $a_1 = 0$. Definierar vi a_k med hjälp av rekursionsformeln och startvärdena $a_0 = A$, $a_1 = 0$ och $a_3 = B$, kommer potensseriens konvergensradie att vara ∞. Detta följer av att

$$\sum_{k=0}^{\infty} a_k x^k = \sum_{k=0}^{\infty} a_{2k} x^{2k} + \sum_{k=0}^{\infty} a_{2k+1} x^{2k+1}$$

och att de båda senare serierna har konvergensradien ∞, vilket i sin tur följer av att

$$\left| \frac{a_{k+2}}{a_k} \right| = \frac{1}{(k+2)(k-1)} \to 0 \quad \text{då} \quad k \to \infty.$$

De så definierade potensserierna är de enda möjliga potensserielösningarna, och vi har nu också visat att de verkligen är lösningar på hela den reella axeln. Rekursionsformeln ger att

$$\begin{aligned}
a_2 &= \frac{A}{2}, \\
a_4 &= -\frac{a_2}{4} = -\frac{A}{8}, \\
a_6 &= -\frac{a_4}{6 \cdot 3} = \frac{A}{8 \cdot 6 \cdot 3}, \\
a_8 &= -\frac{a_6}{8 \cdot 5} = -\frac{A}{8 \cdot 8 \cdot 6 \cdot 5 \cdot 3} = -\frac{A}{8 \cdot 6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2}.
\end{aligned}$$

Vi gissar att

$$a_{2k} = \frac{(-1)^{k+1} A}{(2k)(2k-2)(2k-3)(2k-4)\cdots 2} = \frac{(-1)^{k+1}(2k-1)A}{(2k)!} = \frac{(-1)^k (1-2k)A}{(2k)!}.$$

Var god vänd!

Detta stämmer då $k = 0$. Antar vi att formeln gäller för ett visst värde på k, får vi att

$$a_{2k+2} = -\frac{(-1)^k(1-2k)A}{(2k)!(2k+2)(2k-1)} = \frac{(-1)^k(2k+1)A}{(2k+2)!} = \frac{(-1)^{k+1}(1-2(k+1))A}{(2k+2)!}.$$

Formeln gäller alltså för alla naturliga tal k. Vi räknar vidare och får att

$$\begin{aligned} a_5 &= -\frac{a_3}{5 \cdot 2} = -\frac{B}{5 \cdot 2}, \\ a_7 &= -\frac{a_5}{7 \cdot 4} = \frac{B}{7 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 2}, \end{aligned}$$

varefter vi gissar att

$$a_{2k+1} = \frac{(-1)^{k+1} \cdot 2k \cdot 3B}{(2k+1)!}, \quad k \geq 0.$$

Formeln gäller för $k = 0$ och $k = 1$. Antag att den gäller för ett visst $k \geq 1$. Då är

$$a_{2k+3} = -\frac{(-1)^{k+1} \cdot 2k \cdot 3B}{(2k+1)!(2k+3)(2k)} = \frac{(-1)^{k+2}(2k+2) \cdot 3B}{(2k+3)!}.$$

Också nu gäller alltså formeln för alla naturliga tal k. Vi får att

$$\begin{aligned} u(x) &= \sum_{k=0}^{\infty} a_{2k} x^{2k} + \sum_{k=0}^{\infty} a_{2k+1} x^{2k+1} \\ &= A \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k(1-2k)}{(2k)!} \cdot x^{2k} + 3B \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^{k+1} \cdot 2k}{(2k+1)!} \cdot x^{2k+1}. \end{aligned}$$

Eftersom

$$\begin{aligned} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k(1-2k)}{(2k)!} \cdot x^{2k} &= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{(2k)!} \cdot x^{2k} + x \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^{k-1}}{(2k-1)!} \cdot x^{2k-1} \\ &= \cos x + x \sin x \end{aligned}$$

och

$$\begin{aligned} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^{k+1} \cdot 2k}{(2k+1)!} \cdot x^{2k+1} &= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^{k+1}(2k+1-1)}{(2k+1)!} \cdot x^{2k+1} \\ &= -x \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{(2k)!} \cdot x^{2k} + \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{(2k+1)!} \cdot x^{2k+1} \\ &= \sin x - x \cos x, \end{aligned}$$

får vi att $u(x) = C_1(\cos x + x \sin x) + C_2(x \cos x - \sin x)$.