



LUNDS
UNIVERSITET

Matematikcentrum

Matematik NF

Tentamensskrivning
Linjär analys
Måndagen den 3 november 2014
Skrivtid: 8.00–13.00

Formelblad utdelas. Använd institutionens papper, skriv på bara den ena sidan och högst en uppgift på varje papper. Skriv tydligt, ge klara och kortfattade motiveringar, rita gärna figur i förekommande fall och ge tydliga svar. Fyll i omslaget fullständigt och skriv initialer på varje papper.

1. Bestäm konvergensradien ρ för potensserien

$$k(x) = \sum_{n=1}^{\infty} nx^n.$$

Beräkna seriens summa $k(x)$ för varje reellt tal x sådant att $|x| < \rho$.

2. Beräkna integralen

$$\int_0^{2\pi} (1 + \sin^3(x))^2 dx.$$

3. Betrakta funktionen $f(t) = e^t$ för $|t| < \pi$. Beräkna Fourierserien för f på intervallet $(-\pi, \pi)$.

4. Bestäm en lösning u för Cauchyproblemet

$$\begin{cases} \partial_t^2 u(x, t) = \partial_x^2 u(x, t), & x \in \mathbb{R}, t > 0, \\ u(x, 0) = \sin x, & x \in \mathbb{R}, \\ \partial_t u(x, 0) = \sin(2x), & x \in \mathbb{R}, \end{cases}$$

för den 1-dimensionella vågekvationen. Här betecknar $\partial_t = \partial/\partial t$ och $\partial_x = \partial/\partial x$ vanliga partiella derivator.

5. Beräkna gränsvärdet

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_0^1 \frac{\sin^2(nx)}{x^2 + 1} dx,$$

eller visa att det ej existerar.

6. Betrakta funktionerna

$$f_n(x) = ne^{-nx}, \quad x > 0,$$

för $n = 1, 2, 3, \dots$. Visa att funktionsföljden $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$ är likformigt konvergent på intervallet (d, ∞) för varje tal $d > 0$. Visa också att konvergens för funktionsföljden $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$ inte är likformig på hela positiva halvaxeln $(0, \infty)$. Beräkna slutligen gränsvärdet

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_0^1 (7 + x^{100}) f_n(x) dx.$$