LUNDS UNIVERSITET

Tentamensskrivning
Lineär analys
Fredag den 22 augusti 2014
Skrivtid: 8.00–13.00

Matematikcentrum
Matematik NF

Inga hjälpmedel förutom det formelblad, som delas ut i skrivsalen. Använd institutionens papper och skriv bara på en sida. Fyll i omslaget fullständigt och skriv initialer på varje ark. Skriv tydligt. Ge klara och kortfattade motiveringar och rita gärna figur i förekommande fall.

1. Finn en potensserielösning till problemet

$$xy''(x) + y'(x) + y(x) = 0, \quad y(0) = 1.$$

Ange också potensseriens konvergensradie. (Lösningen kan inte uttryckas i elementära funktioner.)

2. Avgör om följande serier är konvergenta.

a) $\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty} (-1)^k \sin\left(\frac{\pi}{2k}\right)$, **b)** $\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty} (-1)^k \cos\left(\frac{\pi}{2k}\right)$, **c)** $\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^k}{k^{2+(-1)^k}}$.

3. Lös begynnelse-randvärdesproblemet

$$\begin{aligned} \partial_t u(x,t) &= 3\partial_x^2 u(x,t), && 0 \le x \le \frac{\pi}{2}, \quad t > 0, \\ u(0,t) &= \partial_x u\left(\frac{\pi}{2}, t\right) = 0, && t > 0, \\ u(x,0) &= \cos^2 x \sin x, && 0 \le x \le \frac{\pi}{2}. \end{aligned}$$

4. Visa att funktionsföljden $(f_n)_{n=1}^{\infty}$ definierad genom

$$f_n(x) = \frac{x}{1 + nx^2}$$

konvergerar likformigt i $\mathbf{R}$.

5. Bernoullipolynomen $B_m(x)$, $m = 0, 1, 2, \ldots$, definieras rekursivt genom

$$B_0(x) = 1, \qquad B_m(x) = x^m - \frac{1}{m+1} \sum_{k=0}^{m-1} \binom{m+1}{k} B_k(x), \quad m \ge 1,$$

och Bernoullitalen B_m genom $B_m = B_m(0)$.

a) Visa, t.ex. med hjälp av induktion, dels att $B_m(0) = B_m(1)$ då $m \ge 2$, dels att $B_m'(x) = mB_{m-1}(x)$ då $m \ge 1$.

Låt u_m vara den 2π-periodiska funktion, för vilken $u_m(x) = B_m(\frac{x}{2\pi})$ då $0 \le x < 2\pi$, och kalla Fourierkoefficienterna för en funktion u för $c_n(u)$.

Var god vänd!

b) Motivera att räkneregeln $c_n(u'_m) = inc_n(u_m)$ får användas då $m \geq 2$, och visa med hjälp av denna att

$$c_0(u_m) = 0, \qquad c_n(u_m) = -\frac{m!}{(2\pi in)^m}, \quad n \neq 0,$$

då $m \geq 2$.

c) Bevisa att

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{2k}} = \frac{(-1)^{k+1}(2\pi)^{2k} B_{2k}}{2(2k)!}, \quad k \geq 1.$$