Lösningsförslag. Matematik för naturvetare. Tentamen 2017-03-18
Anders Olofsson

Uppgift 1. Andragradsekvationen har rot $z = 2 + i$ eller $z = 2 - i$. $\square$

Uppgift 2. Det gäller att

$$A \cup B = \{0, 1, 2, 3\}, \quad A \cap B = \{2\} \quad \text{och} \quad A \setminus B = \{0, 1\}.$$

$\square$

Uppgift 3. Gränsvärdet är 3. Genom att definiera $f(0) = 3$ utvidgas f till en kontinuerlig funktion på $\mathbb{R}$. $\square$

Uppgift 4. Den sökta arean ges av

$$\text{Area}(D) = \int_{-1}^{1} (1 - x^2)\, dx = 2 \int_{0}^{1} (1 - x^2)\, dx = 4/3,$$

där den mellersta likheten följer av jämnhet. $\square$

Uppgift 5. Vi inför hjälpfunktionen

$$g(\theta) = \theta - \sin(\theta), \quad \theta \in \mathbb{R}.$$

Observera att olikheten i uppgiften ekvivalent kan formuleras som att $g(\theta) \geq 0$ för $\theta > 0$. Derivering ger att

$$g'(\theta) = 1 - \cos(\theta), \quad \theta \in \mathbb{R}.$$

Det följer härav att $g'(\theta) \geq 0$ för $\theta \in \mathbb{R}$, vilket ger att g är växande på $\mathbb{R}$. Speciellt är $g(\theta) \geq g(0) = 0$ för $\theta > 0$. $\square$

Uppgift 6. Begynnelseproblemet har lösning

$$y(x) = e^x, \quad x \in \mathbb{R}.$$

$\square$

Uppgift 7. Integralen är generaliserad i plus oändligheten i meningen att

$$\int_0^\infty te^{-t}\, dt = \lim_{R \to +\infty} \int_0^R te^{-t}\, dt.$$

Låt $R > 0$. Genom partiell integration har vi att

$$\int_0^R te^{-t}\, dt = -Re^{-R} + \int_0^R e^{-t}\, dt = -Re^{-R} - e^{-R} + 1.$$

En gränsövergång då $R \to +\infty$ ger att

$$\int_0^\infty te^{-t}\, dt = 1.$$

$\square$

Anmärkning. Resultatet i Uppgift 7 ovan ger funktionsvärdet $\Gamma(2) = 1$, där

$$\Gamma(x) = \int_0^\infty t^{x-1} e^{-t}\, dt, \quad x > 0,$$

är den sk Gamma-funktionen. Gamma-funktionen är den gängse generaliseringen av fakultet till icke nödvändigtvis naturliga tal:

$$\Gamma(n+1) = n!$$

för $n \in \mathbb{N}$.