Lösningsförslag. Matematik för naturvetare. Tentamen 2016-08-23
Anders Olofsson

Uppgift 1. Kom ihåg att

$$v \cdot w = |v||w|\cos(\theta),$$

där θ är vinkeln mellan vektorerna v och w. I vårt fall är $|v| = 3$, $|w| = 3\sqrt{2}$ och $v \cdot w = 9$. Insättning ger $\cos(\theta) = 1/\sqrt{2}$, dvs. $\theta = \pi/4$. $\square$

Uppgift 2. Genom variabelbytet $x = 1 + t$ fås att

$$\lim_{x\to 1} \frac{\ln(x)}{x-1} = \lim_{t\to 0} \frac{\ln(1+t)}{t} = 1$$

enligt känt standardgränsvärde för logaritmen. Genom att definiera $f(1) = 1$ utvidgas f till en kontinuerlig funktion på den positiva halvaxeln $(0, \infty)$. $\square$

Uppgift 3. Enligt formel för dubbelvinkel för kosinus har vi att

$$\int_0^{2\pi} \sin^2(\theta)d\theta = \frac{1}{2}\int_0^{2\pi} d\theta - \frac{1}{2}\int_0^{2\pi} \cos(2\theta)d\theta = \pi,$$

där den högra integralen i det mellersta ledet försvinner pga periodicitet. $\square$

Uppgift 4. Lösningen för interpolationsproblemet av minimal grad är polynomet

$$p(x) = x^2 - x + 2$$

för $x \in \mathbb{R}$. $\square$

Uppgift 5. Lösningen för begynnelseproblemet är

$$y(x) = (1 + x)e^x$$

för $x \in \mathbb{R}$. $\square$

Uppgift 6. Volymen av enhetsklotet är $4\pi/3$. Volymen kan tex beräknas som rotationsvolym. $\square$

Uppgift 7. Sätt

$$h(x) = \arctan(x) + \arctan(1/x)$$

för $x > 0$. En derivering ger att

$$h'(x) = \frac{1}{1+x^2} + \frac{1}{1+(1/x)^2}(-1/x^2) = 0.$$

Enligt känd sats följer att funktionen h är konstant: $h(x) = C$ för $x > 0$. Värdet på konstanten C är $\pi/2$, vilket kan fås tex genom att beräkna $h(1) = \pi/2$. $\square$