Lösningsförslag. Matematik för naturvetare. Tentamen 2016-04-09
Anders Olofsson

*Uppgift 1.* Det komplexa talet är $z = 2 + i$. $\square$

*Uppgift 2.* Ekvationssystemet har lösning $(x, y, z) = (3, 3, -1)$. $\square$

*Uppgift 3.* Från binomialsatsen har vi att

$$f(x) = \frac{(1+x)^4 - 1}{x} = 4 + 6x + 4x^2 + x^3$$

för $x \neq 0$. Härav följer att gränsvärdet är 4. Genom att definiera $f(0) = 4$ utvidgas $f$ till en kontinuerlig funktion på $\mathbb{R}$. $\square$

*Uppgift 4.* En partiell integration ger att

$$\int_1^e x \ln(x) dx = \Big[\frac{x^2}{2} \ln(x)\Big]_1^e - \int_1^e \frac{x^2}{2} \frac{1}{x} dx = \frac{e^2}{2} - \frac{1}{2}\Big[\frac{x^2}{2}\Big]_1^e$$
$$= \frac{e^2}{2} - \frac{1}{2}\Big(\frac{e^2}{2} - \frac{1}{2}\Big) = \frac{1}{4} + \frac{e^2}{4}.$$

$\square$

*Uppgift 5.* Enligt känd formel ges den sökta arean av integralen

$$\text{Area}(D) = \int_0^3 (x - (x^2 - 2x))dx = \int_0^3 (3x - x^2)dx = 9/2.$$

$\square$

*Uppgift 6.* En kvadratkomplettering ger att

$$\tan g(x) = x^2 - 6x + 10 = (x-3)^2 + 1.$$

Det är härav klart att funktionen $g$ har minsta värde $g(3) = \arctan(1) = \pi/4$. $\square$

*Uppgift 7.* Det är klart att begynnelsevillkoret $y(1) = 0$ är uppfyllt. Observera att

$$e^x y(x) = \int_1^x e^t \arctan(t) dt$$

för $x \in \mathbb{R}$. En derivering med huvudsats ger

$$e^x y(x) + e^x y'(x) = e^x \arctan(x),$$

vilket förenklas till ekvationen

$$y'(x) + y(x) = \arctan(x)$$

för $x \in \mathbb{R}$. $\square$