Lösningsförslag. Matematik för naturvetare. Tentamen 2016-03-19
Anders Olofsson

Uppgift 1. Absolutbeloppet är $|z| = 2$. Argumentet är $\theta = 3\pi/2$. $\square$

Uppgift 2. Observera att

$$f(x) = \frac{x^4 - 1}{x - 1} = 1 + x + x^2 + x^3$$

för $x \neq 1$ enligt formel för ändlig geometrisk summa. Härav följer att gränsvärdet är 4. Genom att definiera $f(1) = 4$ utvidgas f till en kontinuerlig funktion på $\mathbb{R}$. $\square$

Uppgift 3. Enligt formel för dubbelvinkel för kosinus har vi att

$$\int_0^{2\pi} \cos^2(\theta) d\theta = \frac{1}{2} \int_0^{2\pi} d\theta + \frac{1}{2} \int_0^{2\pi} \cos(2\theta) d\theta = \pi,$$

där den högra integralen i det mellersta ledet försvinner pga periodicitet. $\square$

Uppgift 4. En lösning för interpolationsproblemet är

$$p(x) = 2x^2 - 3x + 5, \quad x \in \mathbb{R}.$$

Interpolationspunkterna $(-1, 10)$, $(1, 4)$ och $(2, 7)$ ligger ej på en rät linje. Interpolationsproblemet kan därför ej lösas med polynom av grad mindre än eller lika med 1. Polynomet p ovan är därför en lösning av minimal grad. $\square$

Uppgift 5. Lösningen för begynnelseproblemet är

$$y(x) = (1 + x)e^{-x^2}$$

för $x \in \mathbb{R}$. $\square$

Uppgift 6. En kvadratkomplettering ger att

$$g(x) = (2x + 1)^2 - 6.$$

Det är härav klart att värdemängden för g ges av

$$g(\mathbb{R}) = [-6, \infty) = \Big\{ y \in \mathbb{R} : \ y \geq -6 \Big\}.$$

$\square$

Uppgift 7. Den sökta tangentlinjen är $y = h(1) + h'(1)(x - 1)$. Observera först att

$$h(1) = \int_{-1}^{1} \sin(\pi t^3/2) dt = 0$$

eftersom integranden är udda.

Vi beräknar nu derivatan $h'(1)$. För detta ändamål inför vi hjälpfunktionen

$$H(y) = \int_{-1}^{y} \sin(\pi t^3/2) dt, \quad y \in \mathbb{R}.$$

Observera att $h(x) = H(x^2)$ för $x \in \mathbb{R}$. Från kedjeregeln har vi

$$h'(x) = 2xH'(x^2), \quad x \in \mathbb{R},$$

vilket ger att $h'(1) = 2H'(1)$. Från huvudsatsen har vi

$$H'(y) = \sin(\pi y^3/2), \quad y \in \mathbb{R},$$

vilket ger att $H'(1) = \sin(\pi/2) = 1$. Vi har nu visat att $h'(1) = 2$. Den sökta tangentlinjen är $y = 2(x-1)$. $\square$