LUNDS UNIVERSITET

Matematikcentrum
Matematik NF

Matematik för naturvetare
Lördag den 21 mars 2015
Skrivtid: 14.00–19.00

Lösningar

1. **a)** Summan är en aritmetisk summa. Antalet termer är 1000, den första termen är 1 och den sista 1999. Enligt formeln för aritmetiska summor är summan lika med

$$\frac{1000(1+1999)}{2} = 1000000.$$

Svar: 1000000.

b) Summan är en geometrisk serie. Vi får, att

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{3}{4^k} = \frac{3}{4} \sum_{k=0}^{\infty} \left(\frac{1}{4}\right)^k = \frac{3}{4} \cdot \frac{1}{1-\frac{1}{4}} = 1.$$

Svar: 1.

2. Absolutbeloppet är lika med

$$\left| \frac{i(1-\sqrt{3}\,i)^8}{(\sqrt{3}+i)^7} \right| = \frac{|i||1-\sqrt{3}\,i|^8}{|\sqrt{3}+i|^7} = \frac{1 \cdot 2^8}{2^7} = 2.$$

Det gäller, att

$$\begin{aligned} \arg i &= \frac{\pi}{2}, \\ \arg\left(1-\sqrt{3}\,i\right) &= \arg\left(\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2} i\right) = -\frac{\pi}{3}, \\ \arg\left(\sqrt{3}+i\right) &= \arg\left(\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{i}{2}\right) = \frac{\pi}{6}. \end{aligned}$$

Talets argument är därför

$$\frac{\pi}{2} + 8 \cdot \left(-\frac{\pi}{3}\right) - 7 \cdot \frac{\pi}{6} = \frac{(3-16-7)\pi}{6} = -\frac{10\pi}{3} = \frac{2\pi}{3} - 4\pi,$$

som är likvärdigt med $\frac{2\pi}{3}$.

Svar: Absolutbeloppet är 2, och argumentet är $\frac{2\pi}{3}$.

3. Överflyttning ger den ekvivalenta olikheten

$$\frac{x-1}{x} - \frac{1}{x+2} \leq 0,$$

som i sin tur är ekvivalent med

$$\frac{(x-1)(x+2)-x}{x(x+2)} \leq 0.$$

Förenkling ger

$$\frac{x^2-2}{x(x+2)} \leq 0,$$

och efter faktorisering med hjälp av konjugatregeln får vi den ekvivalenta olikheten

$$f(x) = \frac{(x+\sqrt{2})(x-\sqrt{2})}{x(x+2)} \leq 0.$$

x		-2		$-\sqrt{2}$		0		$\sqrt{2}$	
$x+2$	$-$	0	$+$		$+$		$+$		$+$
$x+\sqrt{2}$	$-$		$-$	0	$+$		$+$		$+$
x	$-$		$-$		$-$	0	$+$		$+$
$x-\sqrt{2}$	$-$		$-$		$-$		$-$	0	$+$
$f(x)$	$+$	odef.	$-$	0	$+$	odef.	$-$	0	$+$

Av teckentabellen följer det, att lösningen ges av $-2 < x \leq -\sqrt{2}$ eller $0 < x \leq \sqrt{2}$.

Svar: $-2 < x \leq -\sqrt{2}$ eller $0 < x \leq \sqrt{2}$.

4. Sätt

$$f(x) = \frac{x^2-x-1}{x^2-3}.$$

Nämnaren är noll, då $x = \pm\sqrt{3}$. För dessa värden på x är $x^2-x-1 = 3 \mp \sqrt{3} - 1 > 0$. Det följer, att $f(x) \to \infty$ då $x \to -\sqrt{3}^-$, $f(x) \to -\infty$ då $x \to -\sqrt{3}^+$, $f(x) \to -\infty$ då $x \to \sqrt{3}^-$ och $f(x) \to \infty$ då $x \to \sqrt{3}^+$. Linjerna $x = -\sqrt{3}$ och $x = \sqrt{3}$ är därför lodräta asymptoter.

Vidare gäller det, att

$$f(x) = \frac{x^2-x-1}{x^2-3} = \frac{1-1/x-1/x^2}{1-3/x^2},$$

varav $f(x) \to 1$ då $x \to -\infty$ och då $x \to \infty$. Linjen $y = 1$ är en vågrät asymptot.

Derivatan är

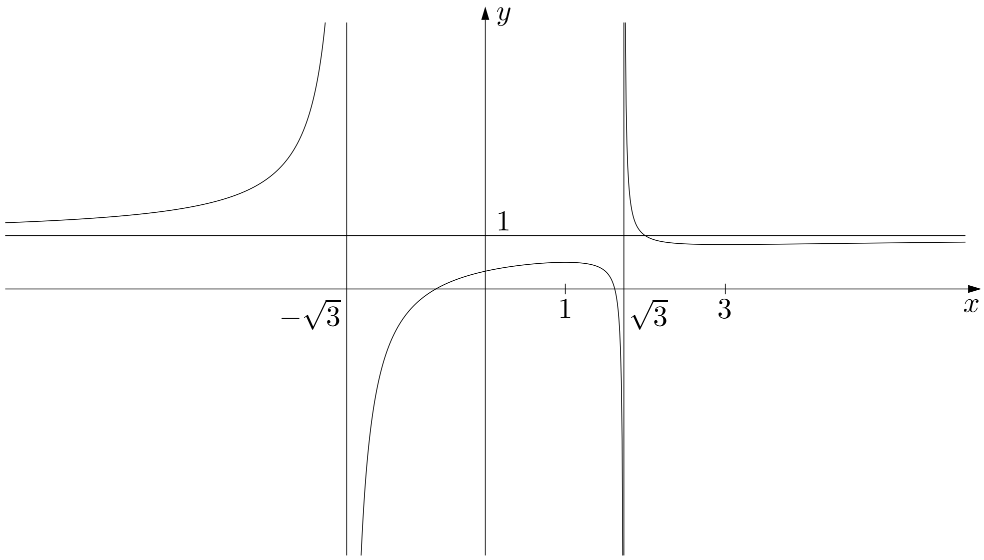
$$f'(x) = \frac{(2x-1)(x^2-3)-(x^2-x-1)\cdot 2x}{(x^2-3)^2} = \frac{x^2-4x+3}{(x^2-3)^2}.$$

Nollställena till polynomet x^2-4x+3 är $x = 1$ och $x = 3$. Derivatan kan därför skrivas

$$f'(x) = \frac{(x-1)(x-3)}{(x^2-3)^2}.$$

x		$-\sqrt{3}$		1		$\sqrt{3}$		3	
$(x^2-3)^2$	$+$	0	$+$		$+$	0	$+$		$+$
$x-1$	$-$		$-$	0	$+$		$+$		$+$
$x-3$	$-$		$-$		$-$		$-$	0	$+$
$f'(x)$	$+$	odef.	$+$	0	$-$	odef.	$-$	0	$+$
$f(x)$	$\nearrow$	odef.	$\nearrow$	$\frac{1}{2}$	$\searrow$	odef.	$\searrow$	$\frac{5}{6}$	$\nearrow$

Vi har, att $f(0) = \frac{1}{3}$, och $f(x) = 0$ då $x = \frac{1 \pm \sqrt{5}}{2}$. Skärningspunkterna med axlarna är därför $\left(0, \frac{1}{3}\right)$, $\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}, 0\right)$ och $\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}, 0\right)$.



Svar: Lodräta asymptoter är linjerna $x = -\sqrt{3}$ och $x = \sqrt{3}$. Linjen $y = 1$ är vågrät asymptot. Kurvan har lokalt maximum i $(1, \frac{1}{2})$ och lokalt minimum i $(3, \frac{5}{6})$. Kurvan skär axlarna i punkterna $(0, \frac{1}{3})$, $\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}, 0\right)$ och $\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}, 0\right)$.

5. Volymen är

$$\pi \int_0^1 (\sqrt{x}\, e^x)^2 \, dx = \pi \int_0^1 x e^{2x} \, dx = \pi \left(\left[\frac{x}{2} e^{2x} \right]_0^1 - \int_0^1 \frac{1}{2} e^{2x} \, dx \right)$$
$$= \pi \left(\frac{e^2}{2} - \left[\frac{e^{2x}}{4} \right]_0^1 \right) = \pi \left(\frac{e^2}{2} - \frac{e^2}{4} + \frac{1}{4} \right) = \frac{\pi(e^2+1)}{4}.$$

Svar: $\frac{\pi(e^2+1)}{4}$.

6. Den karakteristiska ekvationen är $m^2 + 5m + 6 = 0$ och har rötterna $m = -3$ och $m = -2$. Lösningen till motsvarande homogena differentialekvation är därför

$$y = y_h = C_1 e^{-3x} + C_2 e^{-2x}.$$

För att finna en partikulärlösning ansätter vi $y = y_p = A \cos x + B \sin x$. Då är $y' = -A \sin x + B \cos x$ och $y'' = -A \cos x - B \sin x$. Insatt i differentialekvationen ger detta, att

$$-A \cos x - B \sin x - 5A \sin x + 5B \cos x + 6A \cos x + 6B \sin x$$
$$= (5A + 5B) \cos x + (5B - 5A) \sin x = 10 \sin x,$$

varav $5A + 5B = 0$ och $5B - 5A = 10$. Detta ger, att $A = -1$ och $B = 1$, och en partikulärlösning är $y = y_p = \sin x - \cos x$. Den allmänna lösningen till differentialekvationen ges därför av $y = y_h + y_p = C_1 e^{-3x} + C_2 e^{-2x} + \sin x - \cos x$.

Svar: $y = C_1 e^{-3x} + C_2 e^{-2x} + \sin x - \cos x$.

7. a) Med $Q_1 = (1,1,1)$ och $Q_2 = (2,2,3)$ blir $\mathbf{u} = \overrightarrow{Q_1Q_2} = (1,1,2)$ och $\mathbf{v} = (1,2,3)$ basvektorer för planet, som går genom punkten $Q_1 = (1,1,1)$. En ekvation på parameterform för planet är följaktligen

$$\begin{cases} x = 1 + s + t \\ y = 1 + s + 2t \\ z = 1 + 2s + 3t. \end{cases}$$

Svar: Se ovan.

b) Att punkten med koordinater (x, y, z) ligger i planet betyder, att ekvationen på parameterform har en lösning (s, t).

$$\begin{cases} s + t = x - 1 \\ s + 2t = y - 1 \\ 2s + 3t = z - 1 \end{cases} \quad \Leftrightarrow \quad \begin{cases} s + t = x - 1 \\ \phantom{s +{}} t = y - x \\ \phantom{s +{}} t = z - 2x + 1 \end{cases} \quad \Leftrightarrow \quad \begin{cases} s + t = x - 1 \\ \phantom{s +{}} t = y - x \\ \phantom{s +{}} 0 = z - y - x + 1. \end{cases}$$

Ekvationssystemet är alltså lösbart, om och endast om $x + y - z = 1$, vilket är en ekvation på normalform för planet.

Svar: $x + y - z = 1$.

c) Det sökta avståndet är enligt avståndsformeln lika med

$$\frac{|1 \cdot 2 + 1 \cdot 3 - 1 \cdot 1 - 1|}{\sqrt{1^2 + 1^2 + (-1)^2}} = \frac{3}{\sqrt{3}} = \sqrt{3}.$$

Svar: $\sqrt{3}$.

8. Sätt $f(x) = e^{-x}$. Då är $f'(x) = -e^{-x}$, varav tangentens riktningskoefficient är $-e^{-a}$. Tangentens ekvation är därför $y - e^{-a} = -e^{-a}(x - a)$. Tangentens skärningspunkt med y-axeln har y-koordinaten $y = e^{-a} - e^{-a}(0 - a) = (a + 1)e^{-a}$. För tangentens skärningspunkt med x-axeln gäller, att dess x-koordinat ges av $0 - e^{-a} = -e^{-a}(x - a)$, vilket betyder att $x = a + 1$. Triangelarean är därför

$$g(a) = \frac{(a + 1)(a + 1)e^{-a}}{2} = \frac{(a + 1)^2 e^{-a}}{2}.$$

Derivatan är

$$g'(a) = \frac{2(a + 1)e^{-a} - (a + 1)^2 e^{-a}}{2} = \frac{(a + 1)(1 - a)e^{-a}}{2}.$$

Teckenstudium av derivatan visar, att $g(a)$ är så stor som möjligt, då $a = 1$. Arean är då $g(a) = 2e^{-1}$.

Svar: Det största värdet på arean antas då $a = 1$ och är $2e^{-1}$.