



LUNDS
UNIVERSITET

Tentamensskrivning
Matematik för naturvetare
Tisdagen den 23 augusti 2016
Skrivtid: 8.00–13.00

Matematikcentrum

Matematik NF

Formelblad utdelas. I övrigt inga hjälpmedel. Använd institutionens papper, skriv på bara den ena sidan och högst en uppgift på varje papper. Skriv tydligt, ge klara och kortfattade motiveringar, rita gärna figur i förekommande fall och ge tydliga svar. Fyll i omslaget fullständigt och skriv initialer på varje papper.

1. Beräkna vinkeln θ mellan vektorerna

$$v = (-1, 2, 2) \quad \text{och} \quad w = (1, 4, 1)$$

i \mathbb{R}^3 . Ange vinkeln θ i intervallet $0 \leq \theta \leq \pi$.

2. a) Beräkna gränsvärdet

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{\ln(x)}{x-1}.$$

Här betecknar $\ln : (0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$ den vanliga naturliga logaritmfunktionen definierad genom $d \ln(t)/dt = 1/t$ för $t > 0$ och $\ln(1) = 0$.

- b) Betrakta funktionen f definierad genom

$$f(x) = \frac{\ln(x)}{x-1}$$

för $0 < x < 1$ eller $x > 1$. Avgör om funktionen f har kontinuerlig utvidgning till hela den positiva halvaxeln

$$(0, \infty) = \{x \in \mathbb{R} : x > 0\}.$$

3. Beräkna integralen

$$\int_0^{2\pi} \sin^2(\theta) d\theta.$$

4. Bestäm ett polynom p sådant att

$$p(-1) = 4, \quad p(1) = 2 \quad \text{och} \quad p'(1) = 1,$$

eller visa att sådant polynom ej existerar. Bestäm även den minsta graden ett sådant polynom p kan ha i det fall p enligt ovan existerar. Här betecknar $p'(1)$ derivatan av p i punkten 1.

5. Lös begynnelseproblemet

$$\begin{cases} y' - y = e^x, \\ y(0) = 1, \end{cases}$$

dvs. ange y som funktion av x så att de båda villkoren blir uppfyllda.

Var god vänd!

6. Beräkna volymen av enhetsklotet

$$B = \left\{ (x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3 : x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 < 1 \right\}$$

i \mathbb{R}^3 , dvs. beräkna volymen av ett klot med radie 1.

7. Visa likheten att

$$\arctan(x) + \arctan(1/x) = \pi/2$$

för $x > 0$.