Centrala moment i LinAlg

Linjära ekvationssystem $Ax = y$

- Geometrisk tolkning: snittet av flera linjära mängder (linjer, plan m.m.) på affin form, lösningen = linje, plan m.m. på parameterform.
- Att lösa: Gausseliminering $\rightarrow$ trappform + återsubstitution
- Tre fall: ingen, entydig eller ∞ många lösningar
- För kvadratiska A: entydig lösning $\Leftrightarrow$ $\det A \neq 0$.
- På trappform ser man:
  - Antal trappsteg (pivot) = rang
  - Antal fria variabler (ej pivot) = nolldim
  - Dimensionssatsen: rang + nolldim = antal variabler
- Nollrummet = alla lösningar till $Ax = 0$. Bas av nollrummet = vektorer vid fria parametrar i allmän lösning.
- {alla lösningar till $Ax = y$} = patikulärlösning + {alla lösningar till $Ax = 0$}.

Några moment kopplade till lösningen till $Ax = y$

Beteckning $A = [A_1\, A_2\, \ldots\, A_n]$.

- $A_1, \ldots, A_n$ linjärt oberoende $\Leftrightarrow$ $Ax = 0$ har bara lösningen $x = 0$.
- Värdemängden till $F(x) = Ax$ genom att lösa $Ax = y$ med godtycklig y.
- $A_1, \ldots, A_n$ spänner upp hela rummet $\Leftrightarrow$ $Ax = y$ lösbart för alla y.
- Lösningen till $Ax = y$ ger A^{-1} som koefficienter vid y, dvs $x = A^{-1}y$.
- Vid basbyte $\hat{E} = ES$ fås nya koordinater som lösning till $x = S\hat{x}$.
- Omskrivning av planets ekvation från parameterform till affin form.
- Egenvektorer som nollskilda lösningar till $(\lambda I - A)x = 0$.

Bas, linjärt beroende/oberoende och basbyte

- Bas = linjärt oberoende vektorer som spänner upp hela rummet
- Antal basvektorer = dimension. Fler vektorer än dimensionen är alltid linjärt beroende.
- $\hat{E} = ES$ är basbyte $\Leftrightarrow$ S är inverterbar.
- Basbyte $\hat{E} = ES$ motsvarar koordinatbyte $x = S\hat{x} \Leftrightarrow \hat{x} = S^{-1}x$.
- Basbyte $E = [e_1\, e_2\, e_3] \mapsto \hat{E} = [\hat{e}_1\, \hat{e}_2\, \hat{e}_3]$ kan uppfattas som linjär bijektiv avbildning. Kolonnerna i S är koordinater för nya basvektorer i den gamla basen.
- ON-basbyte $\Leftrightarrow$ S ortogonal (enklare att bestämma: $\hat{x} = S^T x$ ty $S^{-1} = S^T$).
- Bästa bas för linjär avbildning: bas av egenvektorer (om den finns).
- Vid koordinatbyte $x = S\hat{x}$ ändras avbildningmatris som $\hat{A} = S^{-1}AS$.
- Matriserna A och $\hat{A} = S^{-1}AS$ har samma egenvärden.

Skalärprodukt och projektionsformel

- Skalärprodukt hanterar längder och vinklar.
- Räknelagar (kommutativ, distributiv).
- ON-bas: enkel koordinatform som $x_1y_1 + x_2y_2 + x_3y_3 + \dots$
- Projektionen av u på n ges av $u' = \frac{u \cdot n}{|n|^2} n$ (Projektionsformeln!)
  - komposantuppdelning
  - olika typer av avstånd (punkt-linje, punkt-plan, linje-linje m.m.)
  - ortogonala/sneda projektioner på linje/plan, spegling i linje/plan

Vektorprodukt, trippelprodukt

- Vektorprodukt hanterar area och normalriktning till ett plan (vinkelrät till två vektorer).
- Räknelagar (antikommutativ, distributiv).
- HON-bas: enklare koordinatform.
- Skalär trippelprodukt som volym med tecken.
- För 3×3 matris: determinant = skalär trippelprodukt av kolonnvektorer (i standardbasen).

Linjära avbildningar

- Definition: kommuterar med vektorsumma och vektormultiplikation med tal.
- F linjär $\Leftrightarrow$ $F(x) = Ax$ i någon bas.
- I basen e_1, e_2, e_3 är $A = [F(e_1)\, F(e_2)\, F(e_3)]$.
- F bijektiv $\Leftrightarrow$ A inverterbar.
- Om A och $\hat{A}$ är två avbildningsmatriser för samma F i två olika baser så gäller $\hat{A} = S^{-1}AS$ för någon inverterbar S.
- Bästa bas för F är den som består av egenvektorer: $\hat{A}$ blir diagonalmatris.
- Standardexempel: projektion/spegling i linje/plan som innehåller origo, vridning kring origo.
- $\det A$ som area-/volymskalan vid linjär avbildning $F(x) = Ax$.

Determinanter

- Bara för kvadratiska matriser.
- det som area/volym med tecken (i ON-bas).
- Att beräkna 3×3 det: Sarrus regel.
- Allmänt $n \times n$: Gausselimination *utan* radbyte + utveckling efter rad/kolonn.
- $\det(AB) = \det(A)\det(B)$ med slutsatser.
- det som area-/volymskala vid linjär avbildning.

Egenvektorer och egenvärden

- $Ax = \lambda x$, $x \neq 0$. Bara för kvadratiska matriser.
- Egenvärden = rötter till ekvationen $\det(\lambda I - A) = 0$.
- Egenvektorer (med egenvärde λ) = nollskilda lösningar till $(\lambda I - A)x = 0$.
- Egenvektorer är den bästa basen för linjär avbildning (om det finns tillräckligt många av dem).
- I denna bas är avbildningsmatris en diagonalmatris.
- Diagonalisering: $S^{-1}AS = D$ där kolonnerna i S är A:s egenvektorer och diagonalelementen i D är A:s egenvärden.
- Matriserna A och $\hat{A} = S^{-1}AS$ har samma karakteristiska polynom.