Matematisk kommunikation för Π
Problemsamling

Magnus Fontes, Pelle Pettersson,
Niels Chr. Overgaard, Charlotte Sonesson,
Johan Fredriksson & Aleksis Pirinen

7 september 2018

Problem 0. Skriv följande summor mha summationstecken. (Dvs på formen $\sum_{k=p}^{q} a_k$ där k är en "räknare" som löper med heltalssteg mellan gränserna p och q och som i varje steg adderar termen a_k till den ackumulerade summan.)

a) $1+2+\cdots+100$.

b) $1^2+2^2+\cdots+37^2$.

c) $1+3+5+\cdots+(2n+1)$, där n är ett naturligt tal.

d) $\frac{1}{101}+\frac{1}{102}+\cdots+\frac{1}{999}+\frac{1}{1000}$.

e) $\frac{1}{101}-\frac{1}{102}+\cdots+\frac{1}{999}-\frac{1}{1000}$.

f) $1+2+4+8+\cdots+128$.

Problem 1. Betrakta formeln

$$\sum_{k=1}^{n} k = \frac{n(n+1)}{2}.$$

Troliggör den först genom att exempelvis i summan $1+2+3+4+5+6$ para ihop termer två och två så att alla par får samma summa. Bevisa sedan formeln genom induktion.

Problem 2. Visa att $\binom{p}{k}$, där $0 < k < p$, är delbart med p om p är ett primtal, och ge ett exempel för att visa att det inte är sant om p inte är ett primtal. Vad är skillnaden?

Problem 3. Visa att om n inte är lika med 2^k för något k så har n minst en udda faktor > 1.

Problem 4. Visa att om 2 delar p och 3 delar p så gäller att $2 \cdot 3 = 6$ delar p. Varför är det till exempel inte sant att om 3 delar p och 6 delar p så delar 18 p (ta t.ex. $p = 6$).

Problem 5. Har ekvationen

$$x^2 = 225 \mod 239$$

någon heltalslösning?

Problem 6. Betrakta ekvationen

$$y^2 \equiv 2 \mod 3. \tag{1}$$

a) Övertyga dig själv om att varje heltal kan skrivas på en av formerna $3k$, $3k+1$ eller $3k+2$ för ett lämpligt valt k.
b) Vad blir $(3k)^2$, $(3k+1)^2$ respektive $(3k+2)^2 \mod 3$?
c) Har ekvationen (1) några heltalslösningar?

Problem 7. a) Har ekvationen

$$x^2 = 0 \mod 4$$

några (icke-triviala) heltalslösningar?
b) Har ekvationen

$$x^2 = 0 \mod 3$$

några (icke-triviala) heltalslösningar?
c) För vilka positiva heltal a har ekvationen

$$x^2 = 0 \mod a$$

(icke-triviala) heltalslösningar?
d) För vilka positiva heltal n har ekvationen

$$x^n = 0 \mod 27$$

(icke-triviala) heltalslösningar?

Problem 8. Visa att för $x > 0$ gäller olikheten $x + \frac{1}{x} \geq 2$ med likhet *om och endast om* $x = 1$ genom att
a) skriva om olikheten till en olikhet av typen "kvadraten på någonting är icke-negativ",
b) använda olikheten mellan aritmetiskt och geometriskt medelvärde,
c) derivera och göra teckenstudium.

Problem 9. Bestäm alla polynom $p(x)$ sådana att $p(2x) = p'(x)p''(x)$.

Problem 10. Fibonaccitalen f_n definieras enligt $f_1 = f_2 = 1$, $f_{n+2} = f_{n+1} + f_n$ för $n \geq 1$. Visa att om $n \geq 13$ så är $f_n > n^2$.

Problem 11. Låt x vara ett heltal. Visa att om x är jämnt är $x^2 \equiv 0 \bmod 4$, och om x är udda är $x^2 \equiv 1 \bmod 4$.

Problem 12. Antag att x, y, z är heltal så att $x^2 + y^2 = z^2$. Visa att x och y inte båda kan vara udda.

Problem 13. Antag att x, y, z är positiva tal. Visa att

$$(x + y + z)^3 \geq 27xyz.$$

Problem 14. Om x, y, z är positiva reella tal så att $x^2 + y^2 + z^2 = 27$, visa att $x^3 + y^3 + z^3 \geq 81$.

Problem 15. Om $a_1, a_2, a_3, b_1, b_2, b_3$ är reella tal så att $a_1 \leq a_2 \leq a_3$ och $b_1 \leq b_2 \leq b_3$, så är

$$3(a_1b_1 + a_2b_2 + a_3b_3) \geq (a_1 + a_2 + a_3)(b_1 + b_2 + b_3).$$

Problem 16. Hitta alla ordnade par av positiva heltal (x, z) sådana att $x^2 = z^2 + 120$.

Problem 17. För ett reellt tal x, låt $[x]$ beteckna det heltal som uppfyller $[x] \leq x \leq [x] + 1$.
a) Vad är $[x] + [-x]$?
b) Visa att $[x + y] \geq [x] + [y]$.
c) Visa att $[x + 1/2]$ är det heltal som ligger närmast x (om x ligger precis mitt emellan två heltal är det det större av dessa).

Problem 18. Låt n vara ett positivt heltal, och visa följande med induktion:

a) $n < 2^n$.

b) $\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k^2} \leq 2 - \frac{1}{n}$

c) $\sum_{k=1}^{n} k^2 = \frac{1}{6}n(n+1)(2n+1)$

d) $\sum_{k=1}^{n} k(k+1) = \frac{1}{3}n(n+1)(n+2)$

e) $\sum_{k=1}^{2^n} \frac{1}{k} \geq 1 + \frac{n}{2}$

f) $n^2 < n!$ för $n \geq 4$

g) Låt f_j beteckna det j'te Fibonaccitalet, och visa $f_{n+1}f_{n-1} - f_n^2 = (-1)^n$.

Problem 19. Visa att om n, r och k är heltal med $0 \le k \le r \le n$ så gäller

$$\binom{n}{r}\binom{r}{k} = \binom{n}{k}\binom{n-k}{r-k}.$$

Problem 20. Visa att om a, b, c och d är heltal med a och c skilda från noll, och sådana att $a|b$ och $c|d$, så gäller $ac|bd$.

Problem 21. Visa att om a, b och $c \neq 0$ är heltal, så gäller att $a|b$ om och endast om $ac|bc$.

Problem 22. Visa att antalet positiva heltal som är mindre än eller lika med x, där x är ett positivt reellt tal, som är delbara med det positiva heltalet d är lika med $[x/d]$.

Problem 23. Visa att kvadraten av varje udda heltal är på formen $8k + 1$.

Problem 24. För vilka positiva heltal m gäller
a) $27 \equiv 5 \mod m$

b) $1000 \equiv 1 \mod m$

c) $1331 \equiv 0 \mod m$.

Svar. a) $m|20$, dvs. $m = 1, 2, 4, 5, 10, 20$. b) $m|999$ och c) $m|1331$. (Är 1331 ett primtal?)

Problem 25. Visa att om n är ett udda positivt heltal, så är

$$1 + 2 + 3 + \cdots + (n-1) \equiv 0 \mod n.$$

Problem 26. Visa att om $n \equiv 3 \mod 4$, så kan inte n vara en summa av kvadraterna på två heltal.

Problem 27. Ett heltal n kallas kraftfullt (powerful) om det är sant att för varje primtal p som delar n, så delar även p^2 n. Visa att n är kraftfullt om och endast om det kan skrivas som en produkt av en perfekt kvadrat och en perfekt kub (dvs $n = a^2 b^3$).

Problem 28. Visa att $7|(3^{2n+1} + 2^{n+2})$ för alla $n \ge 0$.

Problem 29. Vilken veckodag har vi om (a) precis ett år? (b) om en vecka? (c) om en månad, om antalet dagar räknas som innevarande månads.

Problem 30. Bevisa, för varje positivt heltal, formeln:

$$\sum_{k=1}^{n} k^3 = \Big(\sum_{k=1}^{n} k\Big)^2.$$

Problem 31. Visa att det för alla reella tal x, y och varje positivt heltal n gäller att

$$x^n - y^n = (x-y)(x^{n-1} + x^{n-2}y + x^{n-3}y^2 + \cdots + xy^{n-2} + y^{n-1}).$$

Observera att ofta använda "$\cdots$"-notationen faktiskt är tvetydig i fallet då $n = 1$! Skriv därför gärna påståendet mha summationstecken (Σ) istället.

Problem 32. Visa att det för alla reella tal x, y och varje udda positivt heltal n gäller att

$$x^n + y^n = (x+y)(x^{n-1} - x^{n-2}y + x^{n-3}y^2 - \cdots - xy^{n-2} + y^{n-1}).$$

(Läs anmärkningen till förra uppgiften!)

Problem 33. Visa att om $a^n - 1 \in \mathbb{P}$ (där $\mathbb{P}$ står för mängden av primtal) med a och n heltal större än 1, så gäller att $a = 2$ och $n \in \mathbb{P}$.

Anmärkning. Tal av typen $2^n - 1$ kallas för mersennetal. Det är för tillfället okänt om det finns oändligt många mersennetal vilka också är primtal. De största kända primtalen genom tiderna har dock ofta varit av mersennetyp. Exempelvis gäller att $2^{32582657} - 1 \in \mathbb{P}$ (där i överensstämmelse med problemet givetvis $32582657 \in \mathbb{P}$). Detta tal är idag (4 september 2006) det största kända primtalet. Det hittades genom det stora samarbetsprojektet GIMPS (Great Internet Mersenne Prime Search) initierat i början av 1996.

Problem 34. Ungefär hur många siffror innehåller mersenneprimtalet ovan?

Problem 35. Visa att $p+q$ delar p^q+q^p om p och q är primtalstvillingar. (Är förutsättningen nödvändig?)

Problem 36. Finns det några primtalstrillingar, dvs finns det något heltal p sådant att p, $p+2$ och $p+4$ är primtal. Finns det oändligt många primtalstrillingar?

Problem 37. Visa att produkten av k stycken *konsekutiva* (det vill säga på varandra följande) naturliga tal alltid är delbar med $k!$.

Problem 38. Visa att för varje naturligt tal n gäller att

$$p \mid (n^p - n) \quad \text{om } p \text{ är ett primtal.}$$

(Detta är Fermats lilla sats.)

Problem 39. Visa att för varje naturligt tal n gäller att

$$6p \mid (n^p - n) \quad \text{om } p \geq 5 \text{ är ett primtal.}$$

Problem 40. Delar 4097 talet $2^{4097} - 2$? Är 4097 ett primtal? (Observera att $2^{12} = 4096$.)

Problem 41. Visa att

$$x^4 + x^2 + 1 = y^2$$

saknar heltalslösningar om $x \neq 0$.

Problem 42. Visa att

$$3x^2 + 2 = y^2$$

saknar heltalslösningar.

Problem 43. Visa att

$$7x^3 + 2 = y^3$$

saknar heltalslösningar.

Problem 44. Visa att om a, b och c är icke negativa reella tal så gäller att

$$ab^{n-1} + bc^{n-1} + ca^{n-1} \leq a^n + b^n + c^n .$$

Problem 45. Visa att k delar $2^k + 1$ för oändligt många $k \in \mathbb{N}$.

Problem 46. Visa att ett udda heltal $n > 1$ kan skrivas som differensen av två kvadrater, $n = x^2 - y^2$, för entydigt bestämda icke-negativa heltal x och y, om och endast om n är ett primtal.

Problem 47. Siffersumman s av 8^{2012} beräknas. Sedan beräknar man siffersumman t av s osv. Man håller på tills man har ett ensiffrigt tal som siffersumma. Vilket är detta? (Vink: vad har sifforsumman med räkning modulo 9 att gära?)

Problem 48. De positiva heltalen summeras i grupper enligt 1, $2+3$, $4+5+6$, $7+8+9+10, \ldots$ Beräkna summan i den n:te gruppen.

Problem 49. Antag att två givna naturliga tal p och q är relativt prima (d.v.s förutom den gemensamma delaren 1, så saknar de gemensamma delare). Visa att ${}^{p}\log(q)$ är irrationellt.

Ledning: Prova exempelvis med ett motsägelsebevis av samma typ som det som används då man bevisar att $2^{1/2}$ är irrationellt.

Problem 50. Beräkna summan $9+99+999+\cdots+999+\cdots+9999$, där den sista termen innehåller n stycken nior.

Problem 51. Vilket av talen 333! och 111^{333} är störst? Mer allmänt kan man fråga sig vilket av talen $n!$ och $(\frac{n}{p})^n$ som är störst om låt oss säga $p \geq 3$?

Problem 52. Låt $\mathbb{N} \ni k \to a_k$ vara en följd av reella tal sådan att $a_{k+1} = 1 + a_k^2$. Är talföljden konvergent?

Problem 53. Låt $\mathbb{Z}_+ \ni k \to a_k$ vara en följd av heltal sådan att $a_1 = 1$ och $a_{k+1} = a_k + 2k + 1$. Vad är a_{2012}?

Problem 54. Visa att gränsvärdet

$$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{n}+\frac{1}{n+1}+\cdots+\frac{1}{2n}\right),$$

existerar och beräkna detta gränsvärde.

Ledning: Känner du till något allmänt sätt att uppskatta summor av detta slag?

Problem 55. Visa att talföljden $\mathbb{Z}_+ \ni n \mapsto \sum_{k=1}^{n} k a^k$ konvergerar då $n \to \infty$ om $|a| < 1$. Beräkna dessutom gränsvärdet.

Problem 56. Antag att vi har en oändlig följd av reella tal $s_1, s_2, s_3, \ldots$ sådan att $s_k \to s$ då $k \to \infty$ för något ändligt tal $s \in \mathbb{R}$. Visa att då även medelvärdena

$$\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} s_k \to s, \qquad \text{då } n \to \infty.$$

Problem 57. Lös ekvationen

$$x = 2 + \cfrac{1}{2 + \cfrac{1}{2 + \cdots \cfrac{1}{2 + \frac{1}{x}}}}$$

där antalet bråkstreck är n.

Problem 58. Låt

$$f(x) = \begin{cases} x\sin(\frac{1}{x}) & x \neq 0 \\ 0 & x = 0. \end{cases}$$

Är f kontinuerlig? Är f deriverbar ?

Ledning: Använd definitionerna.

Problem 59. Låt f vara en deriverbar funktion sådan att $f(-x) = f(1+x)$ för alla reella x. Visa att ekvationen $f'(x) = 0$ har en lösning.

Problem 60. Låt g och h vara kontinuerligt deriverbara och icke negativa funktioner från $\mathbb{R}$ till $\mathbb{R}$ sådana att $\int_{-\infty}^{\infty} g(x)\,dx < \infty$ och $\int_{-\infty}^{\infty} h(x)\,dx < \infty$. Visa att om det finns en konstant $C \geq 0$ sådan att

$$g'(x) \leq Cg(x)h(x) \quad \text{för alla } x \in \mathbb{R},$$

så gäller att $g(x) = 0$ för alla $x \in \mathbb{R}$.

Ledning: Vad händer exempelvis om man har likhet i olikheten? Kan man beräkna något i detta fall?

Problem 61. Bestäm alla kontinuerliga funktioner $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ sådana att

$$f(x) + f(x^2) = 0, \qquad x \in \mathbb{R}.$$

Problem 62. Bestäm alla deriverbara funktioner $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ sådana att

$$f'(x) + f(-x) = 0, \qquad x \in \mathbb{R}.$$

Problem 63. Låt $0 \leq d < c < b < a$ och antag att $a + d = b + c$. Visa att

$$x^b + x^c \leq x^a + x^d, \qquad x > 0.$$

Problem 64. Låt $f : \mathbb{R} \to [0, \infty)$ och $g : \mathbb{R} \to [0, \infty)$ vara kontinuerliga funktioner, sådana att f är växande och g är avtagande. Visa att det då gäller att

$$\int_0^1 f(x)g(x)\,dx \leq \int_0^1 f(x)g(1-x)\,dx.$$

Problem 65. Visa att det inte finns några kvadratiska matriser A och B så att

$$AB - BA = I,$$

där I betecknar enhetsmatrisen.

Problem 66. Låt (a, b) betecknaden största gemensamma delaren till heltalen a och b. I de två följande uppgifterna, beräkna (a, b) och bestäm dessutom heltal x_0, y_0 sådana att $(a, b) = x_0 a + y_0 b$.
a) $(51, 35)$.
b) $(357, 243)$.

Problem 67. Lös om möjligt följande kongruenser:
a) $5x \equiv 3 \mod 19$
b) $5x \equiv 7 \mod 19$
c) $42x \equiv 7 \mod 110$
d) $42x \equiv 2 \mod 110$