Hur man **skriver** matematik

Niels Chr. Overgaard

2018-10-01

Information: Opposition och kompisgranskning

En del av inlämningsuppgift går ut på att man granskar och opponerar på en annan kursdeltagares lösning.

- Första versionen klar på torsdag 4 oktober.
- Byta lösning med kompis (enligt lista).
- Läs och granska kompisens lösning. Anteckna kommentarer.
- Kompisgranskningen torsdag 11 oktober:
  1. Lämna kommentarerna skriftligt till din kompis.
  2. Presenterar dina synpunkter muntligt för din kompis.
  3. Vice versa.
  4. Obs, **obligatorisk.**
- Rätta din lösning med utgångspunkt i de kommentarer du fått.
- Lämna in slutgiltig version måndag 15 oktober (vid midnatt)

Instruktioner till kommentarerna

- **Avgör om beviset är korrekt.**
  - Finns det fel eller luckor i beviset? Strunta inledningsvis i stav- och tryckfel!
- **Bedöma lösningens disposition.**
  - Är lösningen lätt att följa? Kan presentationen förbättras?
  - Tar man med för mycket detalj? För få detaljer?
  - Finns alla definitioner, lemman, satser och bevis som behövs?
  - Har icke-standard beteckningar och symboler introducerats för läsaren?
- **Är språket korrekt.**
  - Går det att läsa texten som vore det vanlig svenska? Finns det otydligheter såsom felsyftningar?
- **Finns det stav- och tryckfel?** Finns det LaTeX -fel?.
  - Anteckna i dina skriftliga kommentarer. Markera sida, rad och felets karaktär.

Instruktioner till kommentarerna

- **Avgör om beviset är korrekt.**
  - Finns det fel eller luckor i beviset? Strunta inledningsvis i stav- och tryckfel!
- **Bedöma lösningens disposition.**
  - Är lösningen lätt att följa? Kan presentationen förbättras?
  - Tar man med för mycket detalj? För få detaljer?
  - Finns alla definitioner, lemman, satser och bevis som behövs?
  - Har icke-standard beteckningar och symboler introducerats för läsaren?
- **Är språket korrekt.**
  - Går det att läsa texten som vore det vanlig svenska? Finns det otydligheter såsom felsyftningar?
- **Finns det stav- och tryckfel?** Finns det LaTeX -fel?.
  - Anteckna i dina skriftliga kommentarer. Markera sida, rad och felets karaktär

Instruktioner till kommentarerna

- **Avgör om beviset är korrekt.**
  - Finns det fel eller luckor i beviset? Strunta inledningsvis i stav- och tryckfel!
- **Bedöma lösningens disposition.**
  - Är lösningen lätt att följa? Kan presentationen förbättras?
  - Tar man med för mycket detalj? För få detaljer?
  - Finns alla definitioner, lemman, satser och bevis som behövs?
  - Har icke-standard beteckningar och symboler introducerats för läsaren?
- **Är språket korrekt.**
  - Går det att läsa texten som vore det vanlig svenska? Finns det otydligheter såsom felsyftningar?
- **Finns det stav- och tryckfel?** Finns det LaTeX -fel?.
  - Anteckna i dina skriftliga kommentarer. Markera sida, rad och felets karaktär.

Instruktioner till kommentarerna

- **Avgör om beviset är korrekt.**
  - Finns det fel eller luckor i beviset? Strunta inledningsvis i stav- och tryckfel!
- **Bedöma lösningens disposition.**
  - Är lösningen lätt att följa? Kan presentationen förbättras?
  - Tar man med för mycket detalj? För få detaljer?
  - Finns alla definitioner, lemman, satser och bevis som behövs?
  - Har icke-standard beteckningar och symboler introducerats för läsaren?
- **Är språket korrekt.**
  - Går det att läsa texten som vore det vanlig svenska? Finns det otydligheter såsom felsyftningar?
- **Finns det stav- och tryckfel?** Finns det LaTeX -fel?.
  - Anteckna i dina skriftliga kommentarer. Markera sida, rad och felets karaktär.

Hur skriver man matematik?

Varför ska jag skriva text? (Det räcker väl med rätt svar.)

Här är tre argument varför:

- Välformulerade lösningar kan leda till bättre betyg (på tentorna).
- Behövs i det framtida yrkeslivet (kommunicera med icke-matematiska kollegor).
- För att uppnå intellektuell mogenhet inom matematik: att kunna använda professionens normer och konventioner.
- Dessutom: att skriva är att tänka!

Hur skriver man matematik?

Varför ska jag skriva text? (Det räcker väl med rätt svar.)

Här är tre argument varför:

- Välformulerade lösningar kan leda till bättre betyg (på tentorna).
- Behövs i det framtida yrkeslivet (kommunicera med icke-matematiska kollegor).
- För att uppnå intellektuell mogenhet inom matematik: att kunna använda professionens normer och konventioner.
- Dessutom: att skriva är att tänka!

Hur skriver man matematik?

Varför ska jag skriva text? (Det räcker väl med rätt svar.)

Här är tre argument varför:

- Välformulerade lösningar kan leda till bättre betyg (på tentorna).
- Behövs i det framtida yrkeslivet (kommunicera med icke-matematiska kollegor).
- För att uppnå intellektuell mogenhet inom matematik: att kunna använda professionens normer och konventioner.
- Dessutom: att skriva är att tänka!

Hur skriver man matematik?

Varför ska jag skriva text? (Det räcker väl med rätt svar.)

Här är tre argument varför:

- Välformulerade lösningar kan leda till bättre betyg (på tentorna).
- Behövs i det framtida yrkeslivet (kommunicera med icke-matematiska kollegor).
- För att uppnå intellektuell mogenhet inom matematik: att kunna använda professionens normer och konventioner.
- Dessutom: att skriva är att tänka!

Hur skriver man matematik?

Varför ska jag skriva text? (Det räcker väl med rätt svar.)

Här är tre argument varför:

- Välformulerade lösningar kan leda till bättre betyg (på tentorna).
- Behövs i det framtida yrkeslivet (kommunicera med icke-matematiska kollegor).
- För att uppnå intellektuell mogenhet inom matematik: att kunna använda professionens normer och konventioner.
- Dessutom: att skriva är att tänka!

Skrivtips I

Tips 1:

Skriv på vanlig grammatisk korrekt svenska
(även om din text innehåller formler. Du bör kunna läsa meningen högt)

Språket är flexibelt

Exempel: Följande utsagar säger samma ska om $x \in \mathbb{Z}$:

$$x^2 \text{ är udda} \iff x \text{ är udda.}$$

eller

$$x^2 \text{ är udda om och endast om } x \text{ är udda.}$$

eller

Ett nödvändigt och tillräckligt villkor för att x^2 är udda är att x är udda.

eller

$$x^2 \equiv 1 \pmod 2 \iff x \equiv 1 \pmod 2$$

Nedanstående är en till synas mera allmän utsaga:

$$x^2 - x \equiv 0 \pmod 2$$

Den är i själva verket ekvivalent med tidigare utsagor.

Språket är flexibelt

Exempel: Följande utsagar säger samma ska om $x \in \mathbb{Z}$:

$$x^2 \text{ är udda} \iff x \text{ är udda.}$$

eller

$$x^2 \text{ är udda om och endast om } x \text{ är udda.}$$

eller

$$\text{Ett nödvändigt och tillräckligt villkor för att } x^2 \text{ är udda är att } x \text{ är udda.}$$

eller

$$x^2 \equiv 1 \pmod 2 \iff x \equiv 1 \pmod 2$$

Nedanstående är en till synas mera allmän utsaga:

$$x^2 - x \equiv 0 \pmod 2$$

Den är i själva verket ekvivalent med tidigare utsagor.

Språket är flexibelt

Exempel: Följande utsagar säger samma ska om $x \in \mathbb{Z}$:

$$x^2 \text{ är udda} \iff x \text{ är udda.}$$

eller

$$x^2 \text{ är udda om och endast om } x \text{ är udda.}$$

eller

Ett nödvändigt och tillräckligt villkor för att x^2 är udda är att x är udda.

eller

$$x^2 \equiv 1 \pmod 2 \iff x \equiv 1 \pmod 2$$

Nedanstående är en till synas mera allmän utsaga:

$$x^2 - x \equiv 0 \pmod 2$$

Den är i själva verket ekvivalent med tidigare utsagor.

Språket är flexibelt

Exempel: Följande utsagar säger samma ska om $x \in \mathbb{Z}$:

$$x^2 \text{ är udda} \iff x \text{ är udda.}$$

eller

$$x^2 \text{ är udda om och endast om } x \text{ är udda.}$$

eller

$$\text{Ett nödvändigt och tillräckligt villkor för att } x^2 \text{ är udda är att } x \text{ är udda.}$$

eller

$$x^2 \equiv 1 \pmod 2 \iff x \equiv 1 \pmod 2$$

Nedanstående är en till synas mera allmän utsaga:

$$x^2 - x \equiv 0 \pmod 2$$

Den är i själva verket ekvivalent med tidigare utsagor.

Språket är flexibelt

Exempel: Följande utsagar säger samma ska om $x \in \mathbb{Z}$:

$$x^2 \text{ är udda} \iff x \text{ är udda.}$$

eller

$$x^2 \text{ är udda om och endast om } x \text{ är udda.}$$

eller

Ett nödvändigt och tillräckligt villkor för att x^2 är udda är att x är udda.

eller

$$x^2 \equiv 1 \pmod 2 \iff x \equiv 1 \pmod 2$$

Nedanstående är en till synas mera allmän utsaga:

$$x^2 - x \equiv 0 \pmod 2$$

Den är i själva verket ekvivalent med tidigare utsagor.

Säg det med ord: Ett exempel

"Vi ger nu det vedertagna indirekta beviset för att $\sqrt{2}$ är irrationellt.

Vi har tidigare sett att kvadraten på ett jämnt tal är jämnt och att kvadraten på ett udda tal är udda.

Antag nu att $\sqrt{2}$ vore ett rationellt tal, säg

$$\sqrt{2} = \frac{a}{b}$$

där a och b är heltal. Antag — och detta är väsentligt för vårt resonemang — att bråket a/b är förkortat så långt som möjligt. I synnerhet skall vi begagna oss av det faktum att inte båda a och b är jämna, ty om det vore fallet ..."

Ivan Niven: Reella tal, Prisma 1965

Skrivtips II

Tips 2

Skriv korta meningar.
De är lättare att läsa. Det är svårare att göra fel i korta meningar.

Tips 3

Undvik "tautologiska bevis".
Om man t.ex. vill bevisa att $x^2 - y^2 = (x+y)(x-y)$ är det många som skriver:

$$x^2 - y^2 = (x+y)(x-y) = x^2 + xy - yx - y^2 = x^2 - y^2 \quad \text{stämmer!}$$

Detta är otydligt; Svårt att skilja på "det man vill ska gälla", alltså det man vill bevisa, och det man med säkerhet vet gäller.

Skrivtips III

Tips 4:

Inleda aldrig en mening med en matematisk symbol

Exempelvis är

"f är en deriverbar funktion med definitionsmängd $\mathbf{R}$"

inte lika bra som

"Funktionen f är deriverbar med definitionsmängd $\mathbf{R}$."

Tips 5:

Undvik implikationspilar ($\Rightarrow$) och ekvivalenspilar ($\Leftrightarrow$) i skriven text. Använd fraser som "medför att" och "är ekvivalent med" eller "implicerar att" och "om och endast om" istället.

Skrivtips III

Tips 4:

Inleda aldrig en mening med en matematisk symbol

Exempelvis är

"f är en deriverbar funktion med definitionsmängd $\mathbf{R}$"

inte lika bra som

"Funktionen f är deriverbar med definitionsmängd $\mathbf{R}$."

Tips 5:

Undvik implikationspilar ($\Rightarrow$) och ekvivalenspilar ($\Leftrightarrow$) i skriven text. Använd fraser som "medför att" och "är ekvivalent med" eller "implicerar att" och "om och endast om" istället.

Bevistekniker: motexempel

Fermats lilla sats

$$
\begin{array}{ll}
 & p \in \mathbb{P} \\
\Updownarrow & \\
 & p \mid n^p - n, \quad \forall n \in \mathbb{N}.
\end{array}
$$

Denna sats formulerades av Pierre de Fermat (1601-1665) i ett brev till en kollega 1640, men han angav ej något bevis. Leibniz kände till ett bevis, men det första publicerade beviset hidrör från Leonard Euler (1736).

Bevistekniker: motexempel II

För en matematisk intresserad person är det, med tanke på Fermats sats, naturligt att fråga sig om omvändningen gäller

Ett förmodande

$$
\begin{array}{c}
k \in \mathbb{N} \quad \wedge \quad k | n^k - n, \quad \forall n \in \mathbb{N} \\
\Updownarrow \\
k \in \mathbb{P}.
\end{array}
$$

Kan vi bevisa denna sats? (Uppmuntrande exempel: tänk på inlämningsuppgiften och Mersenne-primtalen.)

Bevistekniker: motexempel III

Svaret är Nej!—ett enda exempel på motsatsen räcker

$$561 | n^{561} - n, \quad \forall n \in \mathbb{N}$$

men

$$561 = 3 \cdot 11 \cdot 17 \notin \mathbb{P}.$$

Exemplet visar på en metod eller "bevisteknik": motexemplet. Ni kan själv använda motexemplet som teknik när ni analyserar giltigheten av satser, t.ex. i avseende att förstå varför var och en av de angivna förutsättningarna i en sats behövs.

Tal av ovanstående typ är kända som Carmichael-tal.