De komplexa talen

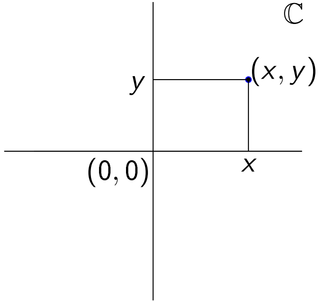
Sara Maad Sasane

Matematikcentrum

Lunds universitet

5 november 2018

Definition av de komplexa talen



- Ett komplext tal är ett ordnat par av reella tal,

$$\mathbb{C} = \{z = (x, y) |\ x \in \mathbb{R} \text{ och } y \in \mathbb{R}\}.$$

- x kallas för realdelen och y för imaginärdelen av $z = (x, y) \in \mathbb{C}$.

Definition av de komplexa talen

- Vi definierar operationerna *addition* $+$ och *multiplikation* $\cdot$ för två komplexa tal genom

$$
\begin{aligned}
(x_1, y_1) + (x_2, y_2) &= (x_1 + x_2, y_1 + y_2), \\
(x_1, y_1) \cdot (x_2, y_2) &= (x_1 x_2 - y_1 y_2, x_1 y_2 + x_2 y_1),
\end{aligned}
$$

  (Ni behöver inte memorera denna konstiga multiplikation. Ni kommer att se ett enkelt sätt att multiplicera snart).

- $(\mathbb{C}, +, \cdot)$ uppfyller kroppsaxiomen. (Minns ni kroppsaxiomen från när vi konstruerade de reella talen? Det är samma axiom.)

Kroppsaxiomen del 1

Axiom (Kroppsaxiomen)

$\mathbb{C}$ är en *mängd* med två operationer, *addition* $+$ och *multiplikation* $\cdot$ som uppfyller

$$
+\begin{cases}
\text{(K1)} & \text{Associativitet} & \text{För alla } z_1, z_2, z_3 \in \mathbb{C}, \\
 & & z_1 + (z_2 + z_3) = (z_1 + z_2) + z_3. \\
\text{(K2)} & \text{Nolla} & \text{För alla } z \in \mathbb{C},\ z + 0 = 0 + z = z. \\
\text{(K3)} & \text{Negation/} & \text{För alla } z \in \mathbb{C},\ \text{existerar } -z \in \mathbb{C} \\
 & \text{additiv invers} & \text{sådant att } z + (-z) = 0 = -z + z. \\
\text{(K4)} & \text{Kommutativitet} & \text{För alla } z_1, z_2 \in \mathbb{C},\ z_1 + z_2 = z_2 + z_1.
\end{cases}
$$

Kroppsaxiomen del 2

Axiom (Kroppsaxiomen, forts.)

$\cdot$	(K5)	Associativitet	För alla $z_1, z_2, z_3 \in \mathbb{C}$, $z_1 \cdot (z_2 \cdot z_3) = (z_1 \cdot z_2) \cdot z_3$.
	(K6)	Etta	$1 \neq 0$ och för alla $z \in \mathbb{C}$, $z \cdot 1 = z = 1 \cdot z$.
	(K7)	(Multiplikativ) invers	För alla $z \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$, så existerar $\frac{1}{z} \in \mathbb{C}$ sådant att $z \cdot \frac{1}{z} = \frac{1}{z} \cdot z = 1$.
	(K8)	Kommutativitet	För alla $z_1, z_2 \in \mathbb{C}$, $z_1 \cdot z_2 = z_2 \cdot z_1$.
$+, \cdot$	(K9)	Distributivitet	För alla $z_1, z_2, z_3 \in \mathbb{C}$, $z_1 \cdot (z_2 + z_3) = z_1 \cdot z_2 + z_1 \cdot z_2$.

Kommentarer till kroppsaxiomen

Det är lätt att kontrollera att egenskaperna i (K1)–(K9) är uppfyllda.

- Nollan i (K2) är det komplexa talet $(0,0)$.
- Negationen till det komplexa talet $z=(x,y)$ i (K3) är $-z := (-x,-y)$.
- Ettan i (K6) är det komplexa talet $(1,0)$. (Kontrollera!)
- Den multiplikativa inversen i (K7) till $z=(x,y)$ är $\frac{1}{z} := \left(\frac{x}{x^2+y^2}, -\frac{y}{x^2+y^2}\right)$. (Kontrollera!)

$\mathbb{R}$ som delkropp av $\mathbb{C}$

- Vi identifierar $\mathbb{R}$ med de komplexa tal vars imaginärdel är 0:

$$\mathbb{R} = \{(x, 0) | \, x \in \mathbb{R}\} \subset \mathbb{C}.$$

OBS! För att detta ska vara vettigt, så måste multiplikationen för de reella talen stämma överens med multiplikationen i $\mathbb{C}$ för tal med imaginärdel 0. Kontroll av detta:

$$(x_1, 0) \cdot (x_2, 0) = (x_1 x_2 - 0 \cdot 0, x_1 \cdot 0 + 0 \cdot x_2) = (x_1 x_2, 0)$$

Motsvarande måste även gälla för addition, vilket är ännu lättare att kolla.

Definition av talet i

- Vi låter i vara en beteckning för det komplexa talet $(0, 1)$.
- Detta tal uppfyller

  $$(0, 1)^2 = (0, 1) \cdot (0, 1) = (0 \cdot 0 - 1 \cdot 1, 0 \cdot 1 + 1 \cdot 0) = -(1, 0),$$

  eller med andra ord,

  $$i^2 = -1.$$

Notation för komplexa tal

- Alla tal $z = (x, y)$ kan nu skrivas

$$z = (x, 0) + (0, y) = (x, 0) + (y, 0) \cdot (0, 1),$$

  d.v.s. $z = x + yi$.

- Med denna notation blir det enkelt att multiplicera. Räkna som för reella tal, men byt ut i^2 mot -1 närhelst det dyker upp. Vi behöver inte komma ihåg den konstiga multiplikationen eftersom

$$\begin{aligned}(x_1 + iy_1) \cdot (x_2 + iy_2) &= x_1x_2 + x_1 \cdot iy_2 + iy_1x_2 + i^2y_1y_2 \\ &= x_1x_2 + i(x_1y_2 + y_1x_2) - y_1y_2 \\ &= x_1x_2 - y_1y_2 + i(x_1y_2 + y_1x_2).\end{aligned}$$

  Kolla att realdelen och imaginärdelen av produkten stämmer överens med hur vi definierade multiplikation av komplexa tal.