LUNDS TEKNISKA HÖGSKOLA
MATEMATIK

FRIVILLIG GRUPPÖVNINGS-UPPGIFT 3 för F1, N1, Pi1
ENDIMENSIONELL ANALYS B2

Sara Maad Sasane

Dessa övningsuppgifter kommer att diskuteras i din övningsgrupp vid övningstillfället den 19 december. Lös övningsuppgiften enskilt eller tillsammans med andra.

1. Denna uppgift går ut på att visa att e är irrationellt genom att använda Maclaurinutveckling och en uppskattning av e, t ex $0 < e < 3$.

   a) Skriv ner Maclaurinutvecklingen med Lagranges restterm för e^x och evaluera den i punkten $x = 1$. Detta ger ett uttryck för e. Uppskatta resttermen uppifrån och nedifrån med hjälp av olikheten $0 < e < 3$.

   b) Antag att e är rationellt och skriv $e = p/q$ där p och q är heltal. Notera att uppskattningen av resttermen från a) ger en dubbelsidig olikhet där mellanledet är differensen mellan p/q och ett annat rationellt tal.

   c) Multiplicera den dubbelsidiga olikheten med $n!$. Går det att vara säker på att mellanledet i olikheten är ett heltal om n är tillräckligt stor? Hur stor måste n vara?

   d) Går det att välja n så att högerledet i den dubbelsidiga olikheten är mindre än 1? Kan kraven på n från deluppgift c) och d) vara uppfyllda samtidigt? I så fall följer ett orimligt påstående (vilket?), och ni har hittat en motsägelse till att e är rationellt.

2. Denna uppgift går ut på att konstruera en funktion f vars Maclaurinserie inte konvergerar mot $f(x)$ för några andra x än $x = 0$. Låt f definieras av

$$f(x) = \begin{cases} e^{-1/x^2} & \text{om } x > 0, \\ 0 & \text{om } x \leq 0. \end{cases}$$

   a) Visa att f är kontinuerlig på hela $\mathbb{R}$. (Det är bara då $x = 0$ som det är något att visa).

   b) Visa att f är deriverbar på hela $\mathbb{R}$ och beräkna $f'(x)$.

   c) Visa att f är oändligt många gånger deriverbar. Återigen är det bara i $x = 0$ som det är några svårigheter. Det är besvärligt att hitta ett explicit uttryck för $f^{(n)}(x)$, men det behövs inte om ni gör på följande vis i stället: Notera att $f'(x)$ (och även $f(x)$) kan skrivas på formen $p(1/x)e^{-1/x^2}$ då $x > 0$, där p är ett polynom. Visa sedan att derivatan av en funktion på denna form alltid är en funktion som också kan skrivas på samma form. Vad är gränsvärdet av sådana funktioner då $x \to 0+$ (om det existerar)? Kan ni nu visa påståendet att f är oändligt många gånger deriverbar?

   d) Skriv ner Maclaurinpolynomet till f av ordning n. Vad är resttermen $R_{n+1}(x)$?

   e) Har f en Maclaurinserie? För vilka x konvergerar den? För vilka x konvergerar den mot $f(x)$?

   Det finns andra funktioner vars Maclaurinserie inte konvergerar mot någon funktion över huvud taget då $x \neq 0$, se t ex artikeln[1].

[1] Kim, Sung S. and Kwon, Kil H., Smooth (C^∞) but nowhere analytic functions, *Amer. Math. Monthly*, **107** (2000), no. 3, pp. 264–266.