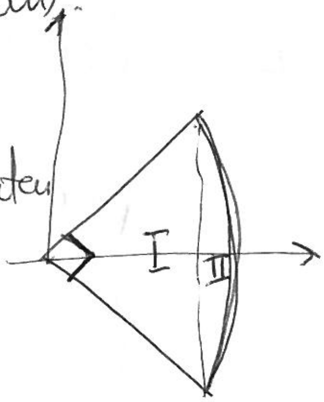
En cirkelsektor med radie R och öppningsvinkel $\pi/2$ roterar kring sin symmetriaxel (x-axeln). Då alstras en kropp som antas vara homogen. Bestäm läget hos tyngdpunkten för denna kropp.



Lösning

Tyngdpunkten måste ligga på positiva x-axeln p.g.a. symmetri. $\rho = 1$ kan antas (homogen!)

$\bar{x} = \frac{1}{m}\int_K x\,dm$. Dela in kroppen i 2 områden.

(I) $dm = A(x)dx = \pi x^2 dx \qquad \left(0 \le x \le \frac{R}{\sqrt{2}}\right)$

(II) $dm = A(x)dx = \pi \sqrt{R^2 - x^2}^{\,2} = \pi(R^2 - x^2) \quad \left(\text{då } \frac{R}{\sqrt{2}} \le x \le R\right)$.

$$m = \int_0^{R/\sqrt{2}} \pi x^2 dx + \int_{R/\sqrt{2}}^{R} \pi(R^2 - x^2)dx = \left[\frac{\pi}{3}x^3\right]_0^{R/\sqrt{2}} + \left[\pi R^2 x - \frac{\pi}{3}x^3\right]_{R/\sqrt{2}}^{R}$$

$$= \pi\left(\frac{R^3}{3\cdot 2\sqrt{2}} + R^3 - \frac{R^3}{3} - \frac{R^3}{\sqrt{2}} + \frac{R^3}{3\cdot 2\sqrt{2}}\right) =$$

$$= \pi\left(\frac{R^3}{3\sqrt{2}} + \frac{2R^3}{3} - \frac{R^3}{\sqrt{2}}\right) = \pi\left(\frac{2R^3}{3} - \frac{2R^3}{3\sqrt{2}}\right) =$$

$$= \frac{2\pi R^3}{3}\left(1 - \frac{1}{\sqrt{2}}\right) = \frac{\pi R^3}{3}(2 - \sqrt{2})$$

$$\int_K x\,dm = \pi\left(\int_0^{R/\sqrt{2}} x^3 dx + \int_{R/\sqrt{2}}^{R} (R^2 x - x^3)dx\right) =$$

$$\pi\left(\left[\frac{1}{4}x^4\right]_0^{R/\sqrt{2}} + \left[\frac{R^2x^2}{2} - \frac{1}{4}x^4\right]_{R/\sqrt{2}}^{R}\right) = \pi\left(\frac{R^4}{16} + \cancel{\frac{R^4}{2}} - \cancel{\frac{R^4}{4}} - \cancel{\frac{R^4}{4}} + \frac{R^4}{16}\right)$$

$$= \pi\frac{R^4}{8}.$$

$$\bar{x} = \frac{\pi R^4}{8} \Big/ \left(\frac{\pi R^3}{3}(2 - \sqrt{2})\right) = \frac{3R}{8(2 - \sqrt{2})} \quad \left(= \frac{3R(2 + \sqrt{2})}{16}\right) \text{ om man vill!}$$

14.35 forts.

$$= \left[\begin{matrix} t = 1 + 9x^4 & x = 0 \Rightarrow t = 1 \\ dt = 36x^3 dx & x = 1 \Rightarrow t = 10 \end{matrix} \right] = \frac{2\pi}{36} \int_1^{10} \sqrt{t}\, dt =$$

$$= \frac{\pi}{18} \left[\frac{2}{3} \cdot t^{3/2} \right]_1^{10} = \frac{\pi}{27} \left(10\sqrt{10} - 1 \right).$$

15.7b Lös $xy' + 10y = \ln x \quad (x > 0)$

Lösning: $y' + \frac{10}{x} y = \frac{\ln x}{x} \quad (x>0)$.

Int. faktor: $e^{\int \frac{10}{x} dx} = e^{10 \ln x} = x^{10}$

Ekv. ekvivalent med $\frac{d}{dx}(x^{10} y) = x^9 \ln x$ (Kolla!)

$$\Leftrightarrow x^{10} y = \int x^9 \ln x \, dx = \frac{1}{10} x^{10} \ln x - \frac{1}{10} \int x^{10} \cdot \frac{1}{x} dx =$$

$$= \frac{1}{10} x^{10} \ln x - \frac{1}{10} \int x^9 dx = \frac{1}{10} x^{10} \ln x - \frac{1}{100} x^{10} + C.$$

$$\Rightarrow y = \frac{1}{10} \ln x - \frac{1}{100} + C \cdot \frac{1}{x^{10}}$$

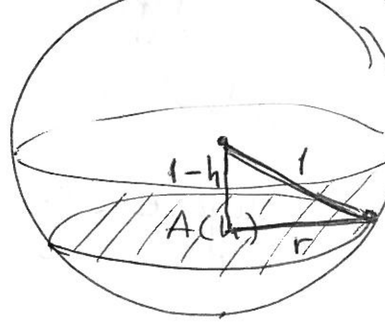
15.18 En kula slår med hastigheten v_0 in i en mjuk vägg av ett material, som antas ge kulan en retardation som är proportionell mot hastigheten. Sök sambandet mellan hastigheten v_0, väggens tjocklek b och proportionalitetskonstanten k, om kulan nätt och jämnt ska kunna tränga igenom väggen.

Lösning. Begynnelsevärdesproblem: $\begin{cases} v'(t) = -kv(t) \\ v(0) = v_0 \end{cases}$

Lösningen är $v(t) = v_0 e^{-kt}$.

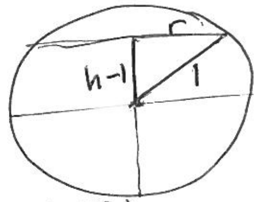
5

Radien är $r = \sqrt{1-(1-h)^2}$ om $0 \le h \le 1$



och $r = \sqrt{1-(h-1)^2}$ om $1 \le h \le 2$

Samma uttryck!



Alltså är $A(h) = \pi(1-(1-h)^2) = \pi(2h-h^2)$ då $0 \le h \le 2$.

Diffekvation för h:

$$A(h)\cdot\frac{dh}{dt} = -k\sqrt{h(t)} \iff \pi(2h-h^2)\frac{dh}{dt} = -k\sqrt{h}.$$

$$\iff \pi(2\sqrt{h} - h^{3/2})\frac{dh}{dt} = -k \iff$$

$$\pi\int(2\sqrt{h} - h^{3/2})\,dh = \int(-k)\,dt \iff$$

$$\pi\left(\frac{4}{3}h^{3/2} - \frac{2}{5}h^{5/2}\right) = -kt + C$$

$$h(0) = 2 \Rightarrow \pi\cdot\left(\frac{4}{3}\cdot 2\sqrt{2} - \frac{2}{5}4\sqrt{2}\right) = C \Rightarrow$$

$$C = 8\pi\left(\frac{2}{15}\sqrt{2}\right) = \frac{16\pi\sqrt{2}}{15}.$$

$h(1) = 1$ ← halva tanken.
↑
1 timme

$$\pi\left(\frac{4}{3} - \frac{2}{5}\right) = -k + \frac{16\pi\sqrt{2}}{15} \iff k = \frac{16\pi\sqrt{2}}{15} - \frac{14\pi}{15} =$$

$$= \frac{2\pi(8\sqrt{2}-7)}{15}$$

När är $h=0$? Då är $kt = C \Rightarrow t = \frac{C}{k} =$

$$= \frac{16\pi\sqrt{2}}{15} \Big/ \left(\frac{2\pi(8\sqrt{2}-7)}{15}\right) = \frac{8\sqrt{2}}{8\sqrt{2}-7} \quad (\approx 2{,}6h)$$