

Såpbubblornas matematik

Den isoperimetriska olikheten

Ta ett snöre och knyt ihop ändarna. Lägg sedan snöret på marken så att största möjliga area innesluts. Vilken form har då snöret?

De flesta gissar nog att snöret skall ha formen av en cirkel. Detta visste redan de gamla grekerna, förstås. Men de kunde inte bevisa att det var så. Först på 1800-talet lyckades man bevisa detta. Det första genombrottet gjordes av Jakob Steiner 1842. Han visade att ingen annan form än cirkeln kan ge största area, men tänkte inte på att man också måste visa att det finns en kurva som ger största area. Denna brist reparerades senare av andra.

Problemet med den största inneslutna arean kallas det isoperimetriska problemet (iso=samma, perimeter=omkrets). Om man betecknar den inneslutna arean med A och kurvans längd med L gäller olikheten $4\pi A \leq L^2$. I denna olikhet får man likhet om kurvan är en cirkel, men sträng olikhet för alla andra kurvor. Detta visar att cirkeln löser vårt problem. Men det visar också att om man har ett område med given area, så är omkretsen minst om området är en cirkelskiva.

Ett besläktat problem är följande fråga: Vilken är den minsta area som kan innesluta en given volym? Här är lösningen ett klot, vilket följer av olikheten $36\pi V^2 \leq A^3$, där V betecknar volymen och A arean.
Minimalytor

Ett annat besläktat problem är att bestämma den yta i rummet med en given rand som har minst area (en minimalyta). Om randen är plan är ytan förstås också plan, men i annat fall är problemet mycket svårt. Ytan man söker ges av den såphinna som har den givna randen, eftersom ytspänningen strävar att göra arean så liten som möjligt. Problemet kallas Plateaus problem efter fysikern Joseph Plateau som gjorde experiment med såpytor omkring 1870. Matematiskt löstes problemet inte förrän omkring 1930 av Jesse Douglas och Tibor Rado oberoende av varandra. De visade att det alltid finns en slät yta som löser problemet om randen inte är alltför komplicerad.

För detta fick Douglas Fieldsmedaljen 1936, som är den högsta professionella utmärkelsen en matematiker kan få. Fieldsmedaljen delas ut till högst fyra matematiker vid den internationella matematikerkongressen vart fjärde år. Medaljen delas bara ut till matematiker som ännu ej fyllt 40.

De såpbubblor som alla har blåst som barn skiljer sig från minimalytorna eftersom det är olika tryck inne i bubblan och utanför. De blir sfäriska eftersom ytspänningen strävar efter minsta möjliga area, men denna kraft balanseras av trycket inne i bubblan.

Recept på hållbara såpbubblor

En del glycerol (finns på apoteket)
En del diskmedel av bra kvalitet
Sju delar vatten

Blanda ihop försiktigt.

MATEMATIKCENTRUM, LUNDS UNIVERSITET, BOX 118, 221 00 LUND
WWW.MATHS.LTH.SE

