LUNDS TEKNISKA HÖGSKOLA
MATEMATIK

TENTAMENSSKRIVNING
ENDIMENSIONELL ANALYS A2
2013–08–23 kl. 8–13

INGA HJÄLPMEDEL. Lösningarna ska vara försedda med ordentliga motiveringar.

1. Beräkna gränsvärdena

a) $\lim_{x\to\infty} \dfrac{3x^2+e^{-x}}{2x^2-\ln x}$ (0.3)

b) $\lim_{x\to 0} \dfrac{e^{1+3x}-e}{2x}$ (0.3)

c) $\lim_{x\to\infty} \left(\sqrt{x^2+2x}-\sqrt{x^2-x}\right)$. (0.4)

2. a) Lös ekvationen $5z+\overline{z}=1-i$. (0.3)

b) Ange ett argument för det komplexa talet $\dfrac{(1-i)^3}{(\sqrt{3}+i)^2}$. (0.3)

c) Ekvationen $z^4-2z^3+14z^2-18z+45=0$ har roten $z=1+2i$. Bestäm ekvationens samtliga rötter. (0.4)

3. Funktionen f är definierad i en omgivning av punkten x_0.

a) Definiera vad som menas med att f är deriverbar i x_0. (0.2)

b) Definiera vad som menas med att f är kontinuerlig i x_0. (0.2)

c) Visa att om f är deriverbar i x_0, så är f kontinuerlig i x_0. (0.2)

d) För vilka värden på konstanterna a och b är funktionen

$$g(x)=\begin{cases} ax+b, & x\le -1, \\ ax^3+x+2b, & x>-1, \end{cases}$$

deriverbar i $x=-1$? (0.4)

4. a) Skriv upp Maclaurins formel med Lagranges restterm. (0.3)

b) Visa att $|\cos(3x)-1+\frac{9}{2}x^2|\le\frac{1}{2}\cdot 10^{-3}$ för alla x som uppfyller $|x|\le\frac{1}{10}$. (0.7)

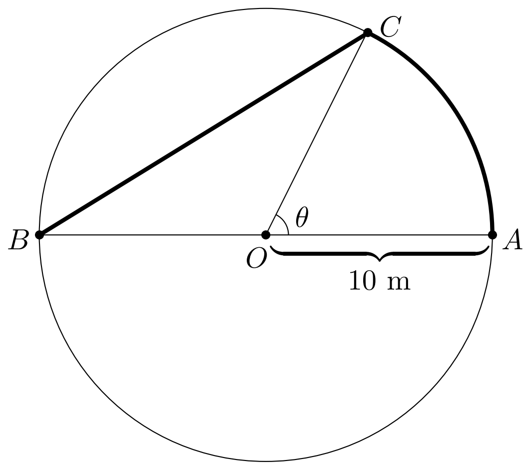
5. Betrakta funktionen $f(x)=ax-1+\dfrac{1}{x}$.

a) Bestäm de positiva värden på konstanten a som gör att $f(x)\ge 0$ för alla positiva x. (0.5)

b) Bestäm de positiva värden på konstanten a som gör att ekvationen $f(x)=-1/2$ har precis en positiv reell rot x. (0.5)

VAR GOD VÄND!

6. Teknologen Anna Lys springer dubbelt så snabbt som hon simmar. Hon står vid punkten A vid en cirkulär swimmingpool med radie 10 meter, och önskar ta sig till den direkt motsatta punkten B. Hon springer längs poolkanten till en punkt C, och simmar sedan raka vägen från C till B. Hur skall punkten C väljas för att den totala tiden att ta sig från punkt A till punkt B ska bli så kort som möjligt? Vilken punkt C ger upphov till den längsta tiden? Läget av punkten C anges lämpligen genom att ange vinkeln θ $(0 \leq \theta \leq \pi)$ i figuren.



LYCKA TILL!