Kapitel 11

Topologi och Måtteori

Detta kapitel kommer att behandla de matematiska begrepp från topologin och mått- och sannolikhetsteorin som är nödvändiga. Genomgången blir naturligtvis av överskådlig karaktär; vi kommer inte att bevisa satser och vi kommer att ta kortast möjliga väg till viktiga resultat och använda enklast möjliga exempel för att illustrera olika begrepp. I avsnittet om topologin kommer bara att behandlas metriska rum eftersom vi i fortsättningen inte behöver allmänna topologiska rum. Den intresserade hänvisas till läroböcker i ämnet (Simmons 1963, Rudin 1987). I avsnittet om måttteori behandlas huvudsakligen sannolikhetsmått, för en utförlig behandling av måtteori se Dudley 1989, Rudin 1987, och för sannolikhetsteori tex Williams 1992.

1 Topologi

Låt A vara en delmängd till $\mathbf{R}$. Om det finns ett tal $\alpha \in \mathbf{R}$ så att $x \leq \alpha$ för varje $x \in A$ sägs α vara en övre gräns av A.

Definition 1 Om det finns ett tal $\alpha \in \mathbf{R}$ så att

- α är en övre gräns till A,
- Om $\gamma < \alpha$ så är γ inte en övre gräns till A, dvs då finns det ett x i A så att $x > \gamma$,

är uppfyllda, kallas α den minsta övre gränsen till A eller supremum av A. Vi skriver då $\alpha = \sup A$. På analogt sätt definieras den största undre gränsen eller infimum, β, av A. Vi skriver då $\beta = \inf A$.

Exempel 1 $\sup([0,1]) = \sup([0,1)) = 1$.

Låt f vara en funktion från någon mängd Ω till $\mathbf{R}$;

$$f : \Omega \rightarrow \mathbf{R}.$$

Då skriver vi

$$\sup_{x \in \Omega} f(x) := \sup\{f(x) : x \in \Omega\} = \sup f(\Omega).$$

1.1 Metriker, öppna och slutna mängder och konvergens

Vi ska nu definiera ett avståndsmått i Ω.

Definition 2 Låt Ω var en mängd. En metrik på Ω är en funktion

$$\rho : \Omega \times \Omega \rightarrow \mathbf{R}$$

sådan att

- $\rho(x, y) \geq 0$ med likhet om och endast om $x = y$,

- $\rho(x, y) = \rho(y, x)$ (symmetri),
- $\rho(x, y) \le \rho(x, z) + \rho(z, y)$ (triangelolikheten).

En metrik mäter alltså avstånd mellan två punkter i mängden Ω. Ω kan vara en mängd av reella tal, av vektorer, av funktioner, av stokastiska variabler .. . En mängd försedd med en metrik kallas ett metriskt rum, vi kallar alltså paret (Ω, ρ) ett metriskt rum. Olika metriker definierar olika metriska rum, som kan ha väldigt olika topologiska egenskaper.

Exempel 2 På $\mathbf{R}$ är $\rho(x, y) = |x - y|$ en metrik. På $\mathbf{R}^3$ är

$$\rho(x, y) = \sqrt{(x_1 - y_1)^2 + (x_2 - y_2)^2 + (x_3 - y_3)^2},$$

en metrik. På $\Omega = \{$begränsade, kontinuerliga funktioner: $\mathbf{R} \to \mathbf{R}\}$ är

$$\rho(x, y) = \sup_{t \in \mathbf{R}} |x(t) - y(t)|,$$

en metrik.

Låt nu (Ω, ρ) var ett metriskt rum. Låt x vara en godtycklig punkt i Ω och låt $r > 0$. Då definierar vi det öppna klotet $B_r(x)$ kring x med radie r som

$$B_r(x) := \{y \in \Omega : \ \rho(x, y) < r\}.$$

Exempel 3 I $\mathbf{R}$ försett med $\rho(x, y) = |x - y|$ ges det öppna klotet kring x med radie r av intervallet $B_r(x) = (x - r, x + r)$.

Definition 3 Låt (Ω, ρ) vara ett metriskt rum. En delmängd A av Ω sägs vara öppen om A kan skrivas som en union (ej nödvändigtvis uppräknelig) av öppna klot, eller ekvivalent, om kring varje x i A kan läggas ett klot som är innehållet i A.

Exempel 4 I $\mathbf{R}$ försett med $\rho(x, y) = |x - y|$ är $(0, 1)$ öppen, och $(0, 1]$ är ej öppen.

En delmängd B av Ω sägs vara sluten om dess komplement B^c är öppen. Det är då klart att ett godtyckligt snitt av slutna mängder är slutet.

Exempel 5 Det slutna klotet

$$\{y \in \Omega : \ \rho(x, y) \le r\},$$

är slutet i det metriska rummet (Ω, ρ), ty dess komplement

$$\{y \in \Omega : \ \rho(x, y) > r\},$$

är öppen.

Om vi har ett avståndsmått kan vi också definiera när en sekvens av punkter konvergerar mot en punkt.

Definition 4 Låt (Ω, ρ) var ett metriskt rum och låt $\{x_n\}$ vara en sekvens i Ω. Vi säger att $\{x_n\}$ konvergerar mot $x \in \Omega$ om

- Till varje $\epsilon > 0$ finns ett n_0 så att om $n \ge n_0$ är $\rho(x_n, x) < \epsilon$, eller ekvivalent,

- Till varje klot $B_\epsilon(x)$ finns ett n_0 så att om $n \geq n_0$ gäller att $x_n \in B_\epsilon(x)$.

Vi skriver då $x_n \to x$; $n \to \infty$, eller $x = \lim_{n\to\infty} x_n$.

Vi kan nu göra en andra ekvivalent definition av slutna mängder i metriska rum.

Sats 1 B är slutet i (Ω, ρ) om och endast om B innehåller alla sina gränspunkter.

En följd av satsen är att av en godtycklig delmängd B av ett metriskt rum, kan vi alltid göra en sluten mängd genom att bilda

$$\bar{B} = B \cup \{\text{B's gränspunkter}\}.$$

$\bar{B}$ kallas slutna höljet av B och är den minsta slutna mängd som innehåller B, och kan fås som snittet av alla slutna mängder som innehåller B. Randen av B definieras som $\bar{B} \cap \bar{B}^c$.

Definition 5 Låt (Ω, ρ) vara ett metriskt rum och $\{x_n\}$ en sekvens i Ω. Definiera limesinferior respektive limessuperior av $\{x_n\}$ som

$$\liminf_{x_n\to\infty} := \sup_{n\geq 1} \inf_{m\geq n} x_m.$$

$$\limsup_{x_n\to\infty} := \inf_{n\geq 1} \sup_{m\geq n} x_m.$$

Observera att eftersom $h_n = \inf\{x_n, x_{n+1}, \ldots\}$ är växande och växer mot $\sup_{n\geq 1} h_n = \liminf_{n\to\infty} x_n$, kan vi också skriva

$$\liminf_{n\to\infty} x_n = \lim_{n\to\infty} \inf_{m\geq n} x_m.$$

Analog formel gäller naturligtvis för limessuperior. Det är klart att det alltid gäller att

$$\liminf x_n \leq \limsup x_n.$$

Exempel 6 Ett exempel på när vi har strikt olikhet är

$$\{x_n\} = \{1, -1, 1, -1, \ldots\},$$

då $\liminf x_n = -1 < 1 = \limsup x_n$.

Det är lätt att se att sekvensen $\{x_n\}$ konvergerar om och endast om $\liminf x_n = \limsup x_n$.

1.2 Cauchy-följder och fullständighet

Om nu (Ω, ρ) är ett metriskt rum och $\{x_n\}$ konvergerar mot $x \in \Omega$, så gäller att för godtyckliga heltal n, m

$$\rho(x_n, x_m) \leq \rho(x_n, x) + \rho(x, x_m).$$

Detta medför att för varje $\epsilon > 0$ finns n_0 och m_0 så att om $m \geq m_0, x \geq n_0$ så är

$$\rho(x_n, x_m) \leq \epsilon/2 + \epsilon/2 = \epsilon.$$

Definition 6 En följd $\{x_n\}$ i ett metriskt rum (Ω, ρ) som satifierar att för varje $\epsilon > 0$ finns n_0 och m_0 så att om $m \geq m_0, n \geq n_0$

$$\rho(x_n, x_m) \leq \epsilon,$$

kallas en Cauchy-följd.

Vi har visat att varje konvergent följd är en Cauchy-följd. Konvergerar Cauchy-följder alltid?

Exempel 7 Låt $\Omega = (0, 1]$ utrustad med $|\cdot|$-metriken, och betrakta följden $\{x_n\} = \{1/n\}$. Då är $\{x_n\}$ en Cauchy-följd men x_n konvergerar inte mot något $x \in \Omega$.

Definition 7 Ett metriskt rum (Ω, ρ) där varje Cauchy-följd konvergerar kallas ett fullständigt rum.

Nästa resultat är ofta användbart.

Sats 2 Om (Ω, ρ) är ett fullständigt metriskt rum och Ω_1 är en delmängd av Ω, så är (Ω_1, ρ) fullständigt om ech endast om Ω_1 är sluten.

Detta medför att av en delmängd Ω_1 till ett fullständigt metriskt rum kan vi alltid göra ett fullständigt rum genom att ta slutna höljet $\bar{\Omega}_1$ av Ω_1.

Exempel 8 Ett viktigt exempel på ett fullständigt metriskt rum är $\mathbf{R}$ försett med $|\cdot|$-metriken. Enligt ovanstående sats är då $(0, 1]$ inte fullständigt medan $[0, 1]$ är det.

Vi ska se fler exempel på viktiga fullständiga metriska rum i avsnittet om måtteori.

1.3 Kontinuitet

Ett viktigt begrepp i topologin är kontinuitet av funktioner. Låt (Ω_1, ρ_1) och (Ω_2, ρ_2) vara två metriska rum och låt

$$f : \Omega_1 \to \Omega_2$$

vara en funktion. Till en godtycklig delmängd $A_1 \subset \Omega_1$ kan vi då definiera bildmängden

$$f(A_1) = \{f(x) : x \in A_1\} \quad \subset \Omega_2,$$

och till en godtycklig delmängd $A_2 \subset \Omega_2$ kan vi definiera inversa bilden

$$f^{-1}(A_2) = \{x \in \Omega_1 : f(x) \in A_2\} \quad \subset \Omega_1.$$

Definition 8 Låt $x \in \Omega_1$ vara en godtycklig punkt. Då sägs f vara kontinuerlig i x om,

- till varje $\epsilon > 0$ finns $\delta > 0$ så att

$$\rho_1(x, y) < \delta \Rightarrow \rho_2(f(x), f(y)) < \epsilon,$$

eller, ekvivalent,

- till varje klot $B_\epsilon(f(x))$ finns ett klot $B_\delta(x)$ så att

$$f(B_\delta(x)) \subset B_\epsilon(f(x)),$$

eller, ekvivalent,

- för varje sekvens $\{x_n\}$ som konvergerar mot x gäller att $\{f(x_n)\}$ konvergerar mot $f(x)$.

Definition 9 f sägs vara kontinuerlig om,

- f är kontinuerlig i varje punkt x

eller, ekvivalent

- $f^{-1}(A)$ är öppen i Ω_1 för varje A öppet i Ω_2.

Föregående definition knyter samman begreppen kontinuerliga funktioner och öppna mängder; kontinuerliga funktioner är alltså de funktioner som drar tillbaka öppna mängder på öppna mängder.

1.4 Rum av funktioner

Vi kommer här att titta på rum av funktioner, på vilka vi kommer att definiera addition och multiplikation med skalärer så att rummen av funktioner blir linjära.

Definition 10 Ett linjärt rum Ω är ett rum där addition $x+y$ mellan två element i rummet är definierad så att

- $x+y=y+x$,
- $x+(y+z)=(x+y)+z$,
- det finns ett nollelement 0 så att $x+0=x$ för alla $x \in \Omega$,
- till varje $x \in \Omega$ finns ett element $\alpha \in \Omega$ så att $x+\alpha=0$; vi betecknar detta med $-x$,

och multiplikation αx med skalärer (i detta fall reella tal) så att

- $\alpha(x+y)=\alpha x+\alpha y$,
- $(\alpha+\beta)x=\alpha x+\alpha y$,
- $(\alpha\beta)x=\alpha(\beta x)$,
- $1x=x$.

Exempel 9 $\mathbf{R}$ försett med de vanliga räknereglerna är ett linjärt rum, $\mathbf{R}^3$ försett med koordinatvis addition och koordinatvis multiplikation med skalärer är ett linjärt rum. $\Omega = \{\text{funktioner} : \mathbf{R} \to \mathbf{R}\}$ försett med

$$(x+y)(t)=x(t)+y(t),\ (\alpha x)(t)=\alpha \cdot x(t),$$

är ett linjärt rum.

Ett normerat linjärt rum Ω är ett linjärt rum försett med en norm, dvs en funktion

$$||\cdot|| : \Omega \to \mathbf{R},$$

sådan att

- $||x|| \geq 0$ med likhet om och endast om $x = 0$,
- $||x + y|| \leq ||x|| + ||y||$,
- $||\alpha x|| = |\alpha| \cdot ||x||$,

Exempel 10 Rummet $\Omega = \{$funktioner $:\mathbf{R} \to \mathbf{R}\}$ försett med

$$||x|| = \sup_{t \in \mathbf{R}} |x(t)|,$$

är ett normerat linjärt rum. $|| \cdot ||$ kallas supremumnormen.

Genom att definiera

$$\rho(x, y) = ||x - y||,$$

blir ρ en metrik, så ett normerat linjärt rum är alltid ett metriskt rum.

Definition 11 Ett normerat linjärt rum Ω som är fullständigt betraktat som ett metriskt rum kallas ett Banach-rum.

Exempel 11 Rummet av kontinuerliga och begränsade funktioner $:\mathbf{R} \to \mathbf{R}$ försett med supremum-normen är ett slutet linjärt rum, och alltså ett Banach-rum.

Definition 12 Ett Hilbert-rum är ett Banach-rum vars norm fås ur en skalärprodukt, dvs ur en funktion

$$(\cdot, \cdot) : \Omega \times \Omega \to \mathbf{R},$$

sådan att

- $(\alpha x + \beta y, z) = \alpha(x, z) + \beta(y, z)$,
- $(x, y) = (y, x)$,
- $(x, x) = ||x||^2$.

Ett Hilbert-rum är alltså ett normerat linjärt rum försett med skalärprodukt som är fullständigt betraktat som ett metriskt rum. Vi kommer att se ett viktigt exempel på Hilbert-rum i måtteorin.

Sats 3 I varje Hilbert-rum gäller

$$|(x, y)| \leq ||x|| \cdot ||y||.$$

I Hilbertrum kan man prata om projektioner och där gäller projektionssatsen.

Sats 4 Om Ω är ett Hilbertrum och Ω_1 är ett slutet linjärt underrum, så är Ω_1 fullständigt så att Ω_1 är också att Hilbertrum. Låt nu x vara en godtycklig punkt i Ω. Då kan x på ett entydigt sätt skrivas som

$$x = x_1 + x_2,$$

där $x_1 \in \Omega_1$ och x_2 ligger i ortogonalrummet till Ω_1 dvs $(x_2, y) = 0, \ \forall y \in \Omega_1$. x_1 kallas projektionen av x på Ω_1, och $||x_2||$ är det minsta avståndet mellan x och Ω_1.

1.5 Funktionaler

Låt $\mathcal{G}$ vara en mängd av funktioner.

Exempel 12 $\mathcal{G} = \{$kontinuerliga funktioner $:\mathbf{R} \to \mathbf{R}$ $\}$,

$$\mathcal{G} = \{\text{växande täthetsfunktioner med kompakt stöd }\},$$

$$\mathcal{G} = \{\text{konvexa och avtagande täthetsfunktioner }\},$$

$$\mathcal{G} = \{\text{kontinuerliga fördelningsfunktioner }\},$$

Vi kan då definiera en funktion

$$\Psi : \mathcal{G} \to \mathbf{R},$$

en s.k. funktional. En funktional kallas linjär om $\mathcal{G}$ är ett linjärt rum och Ψ är en linjär funktion, dvs

$$\Psi(\alpha x + \beta y) = \alpha\Psi(x) + \beta\Psi(y).$$

Exempel 13 Låt $\mathcal{G} = \{$Riemannintegrerbara täthetsfunktioner$\}$. Försett med punktvis addition och punktvis multiplikation med reella tal är detta ett linjärt rum. Definiera Ψ på $\mathcal{G}$ genom

$$\Psi(f) = \int tf(t)\,dt.$$

Då är $\Psi(f)$ väntevärdet av den stokastiska variabel som har f som täthet. Då är Ψ en linjär funktional;

$$\Psi(\alpha f + \beta g) = \int t(\alpha f(t) + \beta g(t))\,dt =$$

$$= \alpha \int tf(t)\,dt + \beta \int tg(t)\,dt = \alpha\Psi(f) + \beta\Psi(g).$$

Definiera funktionalen Φ genom

$$\Phi(f) = \int f^2(t)\,dt.$$

Då är Φ en olinjär funktional.

2 Måtteori

Låt Ω vara en mängd.

Definition 1 En algebra $\mathcal{F}_0$ är en samling av delmängder av Ω sådan att

- $\Omega \in \mathcal{F}_0$,
- $f \in \mathcal{F}_0 \Rightarrow F^c \in \mathcal{F}_0$,
- $F, G \in \mathcal{F}_0 \Rightarrow F \cup G \in \mathcal{F}_0$.

En σ-algebra $\mathcal{F}$ är en algebra sådan att

- $F_1, F_2, \ldots \in \mathcal{F} \Rightarrow \cup_{n\geq 1} F_n \in \mathcal{F}$.

Om Ω är en mängd och $\mathcal{F}$ är en σ-algebra på Ω kallas $(\Omega, \mathcal{F})$ ett mätbart rum.

Exempel 1 $\{\emptyset, \Omega\}$ är en σ-algebra; det är den minsta σ-algebra som kan definieras på Ω. För en godtycklig delmängd A av Ω är $\sigma(A) = \{\emptyset, \Omega, A, A^c\}$ en σ-algebra; det är den minsta σ-algebra som innehåller A och kallas σ-algebra genererad av A.

Exempel 2 Låt $\mathcal{C}$ var mängden av alla ändliga unioner av intervall (a, b) med $-\infty < a \leq b < \infty$ i $\mathbf{R}$. Då är $\mathcal{C}$ en algebra men inte en σ-algebra; tex ligger inte mängden

$$(x, y] = \cap_{n=1}^{\infty}(x, y + \frac{1}{n})$$

för $x < y$, i $\mathcal{C}$.

I sannolikhetsteorin kallas Ω utfallsrummet och består av alla möjliga utfall, dvs resultat av slumpmässiga experiment, mängderna i σ-algebran kallas för händelser.

Exempel 3 Låt $\Omega = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ och $A = \{1, 3, 5\}$. Detta kan ses som modell för kast med tärning. A är händelsen som kan beskrivas som "udda antal ögon kommer upp". $\sigma(A) = \{\emptyset, \Omega, A, A^c\}$, innehåller alltså händelserna "udda antal ögon", "jämnt antal ögon", Ω som är en säker händelse och $\emptyset$ som är en omöjlig händelse.

Man behöver σ-algebror för att få en definition av sannolikheter som är fri från motsägelser (se Williams för Banach-Tarski's paradox).

Låt $\mathcal{C}$ vara en samling av delmängder av Ω. Då definieras σ-algebran genererad av $\mathcal{C}$

$$\sigma(\mathcal{C}),$$

som den minsta σ-algebra som innehåller $\mathcal{C}$. Den kan fås som snittet av alla σ-algbror som innehåller $\mathcal{C}$, vi behöver då visa att snitt av ett godtyckligt antal σ-algebror är en σ-algebra.

Exempel 4 Låt A vara en godtycklig delmängd av Ω. Då gäller $\sigma(A) = \{\emptyset, \Omega, A, A^c\}$.

Om (Ω, ρ) är ett metriskt rum har vi definierat de öppna mängderna i Ω. Nästa definition är av en mycket viktig klass av σ-algebror.

Definition 2 Om (Ω, ρ) är ett metriskt rum definieras Borel-σ-algebran $\mathcal{B}(\Omega)$ som

$$\mathcal{B}(\Omega) = \{\text{öppna mängder i } \Omega\ \},$$

dvs den minsta σ-algebra som innehåller alla öppna mängder i Ω.

Ett viktigt specialfall är när $\Omega = \mathbf{R}$. Det är dock svårt att få en bild av vilka mängder som ingår i $\mathcal{B} = \mathcal{B}(\mathbf{R})$. Det underlättar betydligt att veta att

$$\mathcal{B}(\mathbf{R}) = \sigma\{(-\infty, x] : x \in \mathbf{R}\},$$

dvs att $\mathcal{B}$ är den minsta σ-algebra som innehåller alla intervall av formen $(-\infty, x]$.

2.1 Mängdfunktioner och mått

Låt Ω vara en mängd och $\mathcal{F}_0$ en algebra på Ω. Låt μ_0 vara en icke-negativ mängdfunktion

$$\mu_0 : \mathcal{F}_0 \to [0, \infty],$$

dvs till varje element i $\mathcal{F}_0$, eller delmängd av Ω i $\mathcal{F}_0$, ordnar μ_0 ett tal i $[0, \infty]$. μ_0 sägs vara additiv om

- $\mu_0(\emptyset) = 0$,
- Om $A, B \in \mathcal{F}_0$ är disjunkta så $\mu_0(A \cup B) = \mu_0(A) + \mu_0(B)$.

μ_0 sägs vara uppräkneligt additiv eller σ-additiv om

- $\mu_0(\emptyset) = 0$,
- Om $A_1, A_2, \ldots \in \mathcal{F}_0$ är disjunkta och $\cup_{n \geq 1} A_n \in \mathcal{F}_0$ så $\mu_0(\cup_{n \geq 1} A_n) = \sum_{n \geq 1} \mu_0(A_n)$.

Definition 3 Låt $(\Omega, \mathcal{F})$ vara ett mätbart rum. En mängdfunktion μ

$$\mu : \mathcal{F} \to [0, \infty],$$

kallas ett mått på $(\Omega, \mathcal{F})$ om μ är uppräkneligt additiv. Då kallas $(\Omega, \mathcal{F}, \mu)$ ett måttrum.

Exempel 5

- Låt Ω vara en godtycklig mängd och låt A vara ett element i σ-algebran $\mathcal{F}$. Sätt $\mu(A) = \infty$ om A innehåller oändligt många punkter, och sätt $\mu(A)$ lika med antalet punkter i A om A är en ändlig mängd. Det är lätt att se att μ är ett mått; μ kallas räknemått på $(\Omega, \mathcal{F})$.
- Låt $\Omega = \mathbf{R}$ så att $\mathcal{F} = \mathcal{B}(\mathbf{R})$. Observera först att eftersom $\mathcal{B}(\mathbf{R})$ innehåller alla öppna mängder och en σ-algebra är sluten under komplement-bildning, så innehåller $\mathcal{B}(\mathbf{R})$ också alla slutna mängder. Enpunktsmängderna $\{n\}$ för n heltal är alla slutna och tillhör alltså $\mathcal{B}(\mathbf{R})$. Definiera nu mängdfunktionen $\mu(\{n\}) = 1$ för n godtyckligt heltal, och $\mu(A) = 0$ för A Borelmängd som inte innehåller något heltal. Då blir μ ett mått på $\mathcal{B}(\mathbf{R})$, sådant att $\mu(A)$ är lika med antalet heltal i A, vi kan kalla μ räknemått på reella tallinjen.
- Föregående mått är i själva verket en summa av enpunktsmått, eller enhetsmått. Låt x_0 vara en godtycklig punkt i Ω och anta att σ-algebran $\mathcal{F}$ innehåller alla enpunktsmängder. Definiera mängdfunktionen

  $$\mu(A) = 1_{\{}x_0 \in A\},$$

  dvs $\mu(A) = 1$ om x_0 ligger i A och 0 annars. Då är μ ett mått som vi kan kalla enhetsmassan koncentrerad i x_0

Definition 4 Ett mått sägs vara ändligt om $\mu(\Omega) < \infty$, och det sägs vara σ-ändligt om det finns en sekvens $A_i \in \mathcal{F}$ sådan att $\Omega = \cup_{i \geq 1} A_i$ och $\mu(A_i) < \infty$ för varje i.

Exempel 6 Måttet enhetsmassan koncentrerad i x_0 i föregående exempel är ändligt. Måttet som räknar antalet heltal i en Borelmängd i förgående exempel är σ-ändligt men inte ändligt. Måttet som räknar antalet punkter i en mängd är inte σ-ändligt om $\Omega = \mathbf{R}$ och $\mathcal{F} = \mathcal{B}(\mathbf{R})$; det är inte möjligt att skriva $\mathbf{R}$ som uppräknelig union av element som alla har ändligt många element i sig, ty i så fall vore $\mathbf{R}$ uppräknelig.

Nästa definition är, naturligtvis, viktig i sannolikhetsteorin.

Definition 5 Ett mått μ kallas ett sannolikhetsmått om

$$\mu(\Omega) = 1.$$

Då kallas $(\Omega, \mathcal{F}, \mu)$ ett sannolikhetsrum.

För att kontrollera att en mängdfunktion verkligen är ett mått måste vi kontrollera σ-additivitet för mängder i σ-algebran. Eftersom sådana mängder kan se väldigt konstiga ut, skulle vi vilja kunna definiera en mängdfunktion på en klass av mängder som är lättare att jobba med och sedan utvidga definitionen till σ-algebror. Nästa sats är mycket viktig, den är egentligen den viktigaste i hela sannolikhetsteorin; utan den skulle vi inte kunna göra mycket mer än titta på ändliga utfallsrum.

Sats 1 (Caratheodory's utvidgningssats) Låt Ω vara en mängd och $\mathcal{F}_0$ en algebra på den. Om $\mathcal{F} = \sigma(\mathcal{F}_0)$ och mängdfunktionen

$$\mu_0 : \mathcal{F}_0 \to [0, \infty]$$

är uppräkneligt additiv, då finns det ett mått μ på $(\Omega, \mathcal{F})$ sådant att $\mu = \mu_0$ på $\mathcal{F}_0$. Om $\mu_0 < \infty$ så är måttet μ entydigt bestämt av sina värden på $\mathcal{F}_0$.

Entydigheten är egentligen en följd av nästa resultat. Vi behöver först en definition.

Definition 6 Låt Ω vara en mängd. Ett π-system $\mathcal{I}$ är en samling av delmängder av Ω sådana att om $A, B \in \mathcal{I}$ så är $A \cap B \in \mathcal{I}$.

Sats 2 Låt $\mathcal{I}$ vara ett π-system på Ω och anta att $\mathcal{F} = \sigma(\mathcal{I})$. Om μ_1, μ_2 är två ändliga mått på $(\Omega, \mathcal{F})$ som överenstämmer på $\mathcal{I}$ så överenstämmer de på $\mathcal{F}$.

För våra tillämpningar är följande exempel det viktigaste.

Exempel 7 Klassen $\mathcal{I} = \{(-\infty, x] : x \in \mathbf{R}\}$ av delmängder av $\mathbf{R}$ är ett π-system.

Vi har fått resultatet att varje mått på $\mathbf{R}$ är entydigt bestämt av sina värden på $\mathcal{I} = \{(-\infty, x] : x \in \mathbf{R}\}$.

2.2 Konstruktion av Lebesguemått

Vi ska här skissera hur man kan konstruera ett längdmått på $(0, 1]$. Låt $\Omega = (0, 1]$. Låt $\mathcal{F}_0$ bestå av mängder A som kan skrivas som ändliga unioner av disjunkta, halvöppna intervall;

$$A = (a_1, b_1] \cup (a_2, b_2] \cup \ldots (a_n, b_n],$$

där n heltal och $0 \leq a_1 \leq b_1 \leq \ldots \leq b_n \leq 1$. Då kan man visa att $\mathcal{F}_0$ är en algebra och att $\mathcal{B}(0, 1] = \sigma(\mathcal{F}_0)$.

Definiera nu, för ett $A \in \mathcal{F}_0$, mängdfunktionen μ_0, genom

$$\mu_0(A) = \sum_{i=1}^{n} (b_i - a_i).$$

Då kan man visa att μ_0 är uppräkneligt additiv. Dessutom gäller att $\mu_0(0, 1] = 1 < \infty$. Alltså ger Caratheodory's utvidgningssats att det finns ett entydigt bestämt μ på $\mathcal{B}(0, 1]$ som överensstämmer med μ_0 på $\mathcal{F}_0$. Detta μ kallas Lebesguemått.

På liknande sätt kan konstrueras σ-ändligt Lebesgue-mått på $\mathcal{B}(\mathbf{R})$.

2.3 Mätbara funktioner och stokastiska variabler

Låt $(\Omega, \mathcal{F})$ vara ett mätbart rum och h en reellvärd funktion på Ω,

$$h : \Omega \to \mathbf{R}.$$

Definition 7 Vi säger att h är mätbar eller $\mathcal{F}$-mätbar om

$$\{\omega : h(\omega) \in B\} = h^{-1}(B) \in \mathcal{F},$$

för varje Borelmängd B i $\mathcal{B}(\mathbf{R})$.

Exempel 8 Låt $\mathcal{F} = (\emptyset, \Omega)$. Då är de enda funktioner som är mätbara map $\mathcal{F}$ de konstanta funktionerna. Vi visar först att $h(\omega) = c, \forall\omega$ är $\mathcal{F}$-mätbar. För varje Borelmängd B gäller att antingen innehåller B punkten c eller inte. Anta $c \in B$. Då är $h^{-1}(B) = \Omega$ vilket ligger i $\mathcal{F}$. Anta att $c \notin B$. Då är $h^{-1}(B) = \emptyset$ vilket också ligger i $\mathcal{F}$. Alltså är konstanta funktioner $\mathcal{F}$-mätbara.

För att visa att inga andra funktioner är $\mathcal{F}$-mätbara, anta $h(\omega) = c_1$ på någon delmängd $A \subset \Omega$, och $h(\omega) = c_2$ på A^c. Betrakta Borelmängden B som innehåller c_1 men inte c_2; då är $h^{-1}(B) = A$ vilket inte tillhör $\mathcal{F}$, och vi är klara.

Låt $\mathcal{F} = \mathcal{P}(\Omega)$ vara klassen av alla delmängder av Ω. Då är detta den största σ-algebra på Ω. Alla funktioner är $\mathcal{F}$-mätbara.

I ovanstående exempel har vi stött på två extremfall; vi tittade på den största respektive den minsta σ-algebran på Ω och fann att för den största var alla funktioner mätbara, och för den minsta var endast de konstanta funtionerna mätbara. Då kan man fråga sig om det finns en ”medel”-σ-algebra som gör ”lagom” knepiga funktioner mätbara. Svaret är att om man vet vilka funktioner man vill ska vara mätbara, kan man bestämma en σ-algebra som gör dem mätbara.

Definition 8 Låt h vara en godtycklig reellvärd funktion på Ω. Definiera σ-algebran genererad av h som

$$\sigma(h) = \{h^{-1}(B) : B \in \mathcal{B}(\mathbf{R})\}.$$

Då är detta den minsta σ-algebra som gör h mätbar.

Exempel 9 Låt $h = 1_A$ vara indikatorfunktionen för delmängden A av Ω; dvs $h(\omega) = 1$ om $\omega \in A$ och 0 annars. Då är $\sigma(h) = \sigma(A)$.

När man ska visa att en funktion är mätbar är det praktiskt att använda följande resultat.

Sats 3 Om $\mathcal{C}$ är en samling av delmängder av $\mathbf{R}$ och $\mathcal{B}(\mathbf{R}) = \sigma(\mathcal{C})$, så är $h : \Omega \to \mathbf{R}$ mätbar om och endast om

$$h^{-1}(C) \in \mathcal{F}$$

för varje $C \in \mathcal{C}$.

Observera att vi inte har några krav på den genererande klassen, den behöver alltså inte vara en algebra eller π-system tex.

Kom ihåg att Borel-σ-algebran på $\mathbf{R}$ genereras av klassen $\mathcal{I} = \{(-\infty, x] : x \in \mathbf{R}\}$. Detta ger oss följande viktiga resultat.

Corollarium 1 $h : \Omega \to \mathbf{R}$ är mätbar om och endast om

$$\{\omega : h(\omega) \leq x\} = h^{-1}(-\infty, x] \in \mathcal{F},$$

för varje $x \in \mathbf{R}$.

Om man har en klass av mätbara funktioner kan man alltid få fler genom att addera, multiplicera, sammansätta,....

Sats 4 Om h_1, h_2, h är mätbara funktioner, så är $h_1 + h_2, h_1 h_2, h_1(h_2)(\cdot)$ och för godtycklig reell konstant c, ch det också. Om $\{h_n\}_{n\geq 1}$ är en sekvens av mätbara funktioner så är $\limsup h_n, \liminf h_n$ det också.

Ett viktigt fall av mätbara funktioner är när $(\Omega, \mathcal{F})$ är en modell för ett statistiskt experiment. Då kallas en mätbar funktion h för en stokastisk variabel och vi skriver ofta $X = h$.

Exempel 10 Låt $\Omega = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}, A = \{1, 3, 5\}$ och $\mathcal{F} = \sigma(A) = \{A, A^c, \emptyset, \Omega\}$. Definiera funktionen X på Ω genom $X(u) = 1$ om u är ett udda tal och $X(u) = 0$ annars. Då gäller att för varje Borelmängd är exakt ett av följande påståenden är sant;

1. $0 \in B$ och $1 \in B \Rightarrow X^{-1}(B) = \Omega \in \mathcal{F}$,
2. $0 \in B$ och $1 \notin B \Rightarrow X^{-1}(B) = A^c \in \mathcal{F}$,
3. $0 \notin B$ och $1 \in B \Rightarrow X^{-1}(B) = A \in \mathcal{F}$,
4. $0 \notin B$ och $1 \notin B \Rightarrow X^{-1}(B) = \emptyset \in \mathcal{F}$.

Alltså gäller att $X^{-1}(B) \in \mathcal{F}$ för varje Borelmängd B och X är en mätbar funktion och alltså en stokastisk variabel.

2.4 Fördelningen för en stokastisk variabel

Låt nu $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ vara ett sannolikhetsrum, och låt X vara en stokastisk variabel. Detta betyder att $X^{-1}(B)$ ligger i $\mathcal{F}$ för varje Borelmängd B så att vi kan beräkna $P(X^{-1}(B)) = P(\omega : X(\omega) \in B)$. Definiera mängdfunktionen P_X på Borel-σ-algebran

$$P_X : \mathcal{B}(\mathbf{R}) \to [0, 1],$$

genom

$$P_X(B) = P(X^{-1}(B)) = P(\omega : X(\omega) \in B).$$

Då är det lätt att se att P_X är ett sannolikhetsmått på $\mathcal{B}(\mathbf{R})$. P_X kallas för fördelningen för X (eng. The Law of X).

Så för att räkna med sannolikheter för stokastiska variabler går vi från måttet P på Ω till måttet P_X på $\mathcal{B}(\mathbf{R})$. Men vi kommer ihåg att Borel-σ-algebran genererades av π-systemet $\mathcal{I} = \{(-\infty, x] : x \in \mathbf{R}\}$, och vi har ett resultat som säger att för ändliga mått, bestämmer värdena på ett π-system som genererar σ-algebran entydigt måttets värden på σ-algebran. Alltså har vi att P_X's värden på $\mathcal{B}(\mathbf{R})$ entydigt bestäms av dess värden på $\mathcal{I}$. Om vi nu definierar fördelningsfunktionen för X genom

$$F_X(x) = P_X(-\infty, x],$$

så har vi visat att P_X entydigt bestäms av fördelningsfunktionen F_X.

Det är enkelt att se att en fördelningsfunktion är

- växande,
- högerkontinuerlig,
- satisfierar $\lim_{x\to\infty} F(x) = 1$ och $\lim_{x\to-\infty} F(x) = 0$.

Man kan också visa omvändningen, dvs att om F har egenskaperna ovan så kan vi på ett entydigt sätt konstruera ett sannolikhetsmått Q på $(\mathbf{R}, \mathcal{B}(\mathbf{R}))$ så att $Q(-\infty, x] = F(x)$.

2.5 Integration med avseende på mått

Vi ska här definiera integration med avseende på ett allmänt mått. Låt alltså $(\Omega, \mathcal{F}, \mu)$ vara ett måttrum. För en reellvärd funktion på Ω vill vi definiera

$$\int f(\omega)\, d\mu(\omega) = \int f(\omega)\mu(d\omega).$$

Vi kommer att göra detta i fyra steg; först definierar vi integralen av en indikatorfunktion av en mängd i $\mathcal{F}$, sedan av funktioner som är positiva, mätbara och sträckvis konstanta (positiva linjärkombinationer av indikatorfunktioner), sedan av positiva mätbara funktioner och sist definierar vi integralen av en mätbar funktion.

Steg 1 Låt A vara en mängd i $\mathcal{F}$, och definiera indikatorfunktionen $f = 1_A$ av A. Definiera integralen av f med avseende på måttet μ som

$$\int f\ d\mu = \int 1_A\ d\mu = \mu(A).$$

Steg 2 Låt nu f vara en ändlig linjärkombination av indikatorfunktioner av element i $\mathcal{F}$;

$$f = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i 1_{A_i},$$

med alla $0 \le \alpha_i \le \infty$. f sägs då vara en enkel funktion. Då är f $\mathcal{F}$-mätbar, och positiv. Vi definierar nu

$$\int f\ d\mu = \sum_{k=1}^{n} \alpha_k \mu(A_k).$$

Det är enkelt att kontrollera att denna är väldefinierad, dvs att om vi har två olika representationer av f som en ändlig linjärkombination så får vi samma värde på integralen.

Steg 3 Låt nu f vara $\mathcal{F}$-mätbar och positiv. Definiera

$$\int f\ d\mu = \sup\{\int h\ d\mu : h \text{ enkel} \le f\}.$$

Nästa resultat är ganska självklara och kontrolleras lätt.

Sats 5 Integralen av positiva, $\mathcal{F}$-mätbara funktioner satisfierar;

- Om f, g är två positiva $\mathcal{F}$-mätbara funktioner sådana att $\mu(\omega : f(\omega) = g(\omega)) = 1$, så är

  $$\int f\ d\mu = \int g\ d\mu,$$

  dvs två funktioner som är lika μ-nästan överallt har samma integral.

- Om $\alpha, \beta \geq 0$ och f, g är två positiva $\mathcal{F}$-mätbara funktioner så gäller

  $$\int \alpha f + \beta g \, d\mu = \alpha \int f \, d\mu + \beta \int g \, d\mu,$$

  dvs integralen är en linjär funktional över klassen av positiva och $\mathcal{F}$-mätbara funktioner.

- $f \leq g \Rightarrow \int f \, d\mu \leq \int g \, d\mu$.

Ett viktigt resultat är att för positiva funktioner som konvergerar monotont kan man byta ordning på integration och gränsvärde.

Sats 6 (Monoton konvergens) Om $(f_n)_{n\geq 1}$ är en sekvens av positiva och $\mathcal{F}$-mätbara funktioner som växer mot en $\mathcal{F}$-mätbar funktion f $\mu - n.s.$ så gäller att

$$\int f_n \, d\mu \uparrow \int f \, d\mu.$$

Steg 4 Låt slutligen f vara en allmän $\mathcal{F}$-mätbar funktion och definiera

$$f^+ = \max(f, 0),$$

$$f^- = -\min(f, 0).$$

Då är $f = f^+ - f^-$ och $|f| = f^+ + f^-$, och f^+, f^- är $\mathcal{F}$-mätbara och positiva. Alltså kan vi definiera

$$\int f^+ \, d\mu, \int f^- \, d\mu.$$

Definition 9 Vi säger att f är μ-integrerbar om

$$\int |f| \, d\mu = \int f^+ \, d\mu + \int f^- \, d\mu < \infty,$$

och skriver $f \in \mathcal{L}^1(\Omega, \mathcal{F}, \mu)$.Vi definierar då integralen av f med avseende på μ som

$$\int f \, d\mu = \int f^+ \, d\mu - \int f^- \, d\mu.$$

Det är lätt att visa att $\mathcal{L}^1(\Omega, \mathcal{F}, \mu)$ är ett linjärt rum av funktioner, dvs att om $f, g \in \mathcal{L}^1(\Omega, \mathcal{F}, \mu)$ så följer $\alpha f + \beta g \in \mathcal{L}^1(\Omega, \mathcal{F}, \mu)$. Från definitionen följer också att $|\int f \, d\mu| \leq \int |f| \, d\mu$. Nästa resultat är ett av standardverktygen i matematisk analys.

Sats 7 (Lebesgue's dominerade konvergenssats) Om $(f_n)_{n\geq 1}$ är en sekvens av $\mathcal{F}$-mätbara funktioner, $g \in \mathcal{L}^1(\Omega, \mathcal{F}, \mu)$, $|f_n| \leq g$, och f_n konvergerar mot f μ-nästan säkert så följer

$$\int f_n \, d\mu \to \int f \, d\mu.$$

Integralen av en mätbar funktion över en delmängd A definieras enkelt på följande sätt.

Definition 10 Om A är en mängd i $\mathcal{F}$ och f är $\mathcal{F}$-mätbar definieras

$$\int_A f = \int f 1_{\{A\}} \, d\mu.$$

Exempel 11 Följande exempel är mycket viktiga.

- Låt λ vara Lebesgue-måttet på $\mathcal{B}(\mathbf{R})$. Då skriver vi

$$\int f(x)\, d\lambda(x) =: \int f(x)\, dx,$$

för $f \in \mathcal{L}^1(\mathbf{R}, \mathcal{B}(\mathbf{R}), \lambda)$. Detta är ett generellare integralbegrepp än Riemannintegrerbarhet, dvs om f är en Riemannintegrerbar funktion funktion så är f också Lebesgueintegrebar. Att omvändningen inte är sann följer genom att betrakta funktionen $f(x) = 1$ för x rationellt tal mellan 0 och 1 och $f(x) = 0$ för övrigt. Då är f inte Riemannintegrerbar (försök att använda under och överfunktioner som i definitionen av R-integerbarhet) medan Lebesgueintegralen blir 1.

- Låt μ vara måttet som räknar antalet heltal i en mängd i Borel-σ-algebran på $\mathbf{R}$, dvs $\mu\{n\} = 1$ för n heltal och $\mu(A) = 0$ för A Borelmängd som inte innehåller några heltal. Då gäller att för A Borelmängd och f $\mathcal{B}(\mathbf{R})$-mätbar är

$$\int_A f\, d\mu = \sum_{n \in A} f(n).$$

Detta visas på följande sätt. Låt $A = B_1 \cup B_2$ där B_1 består av de heltal som finns i A och B_2 är resten. Då har vi att

$$\int_A f\, d\mu = \int_{B_1} f\, d\mu + \int_{B_2} f\, d\mu.$$

Den andra termen blir noll eftersom $\mu(B_2) = 0$, och den första är

$$\int 1_{B_1} f\, d\mu = \int \sum_{n \in A} 1_n f\, d\mu =$$

$$= \sum_{n \in A} \int 1_n f\, d\mu = \sum_{n \in A} f(n).$$

- Om $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ är ett sannolikhetsrum, X är en s.v. och F är fördelningsfunktionen för X, och g är $\mathcal{B}(\mathbf{R})$-mätbar definierar vi

$$\int g(x)\, dF(x) = \int g(x)\, dP_X(x).$$

Kom ihåg att $P_X(B) = P(\omega : X(\omega) \in B)$ entydigt bestämdes av F's värden på $\mathbf{R}$. F är ju restriktionen av måttet P_X till π-systemet $\{(-\infty, x] : x \in \mathbf{R}\}$, så att ovanstående definition är vettig.

2.6 Radon-Nikodym's sats och tätheter

Låt $(\Omega, \mathcal{F}, \mu)$ vara ett måttrum och f en positiv $\mathcal{F}$-mätbar funktion. Definiera mängdfunktionen ν på $\mathcal{F}$ genom

$$\nu(A) = \int_A f \, d\mu = \int 1_{\{A\}} f \, d\mu.$$

Då följer av Lebesgue-integralens additivitet och monoton konvergens att ν är ett mått på $\mathcal{F}$. De två måtten μ och ν har följande relation; för varje A i $\mathcal{F}$ gäller

$$\mu(A) = 0 \Rightarrow \nu(A) = 0.$$

Om två mått μ och ν uppfyller denna relation säger vi att ν är absolutkontinuerligt med avseende på μ. Nästa resultat ger villkor för när omvändningen är sann.

Sats 8 (Radon-Nikodym) Låt μ, ν vara två σ-ändliga mått. Om ν är absolutkontinuerligt med avseende på μ så finns en positiv $\mathcal{F}$-mätbar funktion f sådan att

$$\nu(A) = \int_A f \, d\mu,$$

för varje A i $\mathcal{F}$. Om f_1, f_2 är två sådana funktioner så gäller $\mu(f_1 = f_2) = 1$.

Ett f som i satsen ovan kallas Radon-Nikodym-derivatan av ν med avseende på μ och vi skriver ibland

$$f = \frac{d\nu}{d\mu}.$$

Formellt är då

$$\int_A \frac{d\nu}{d\mu} \, d\mu = \int_A d\nu = \nu(A).$$

Exempel 12 Nästa två resultat är grundläggande i sannolikhetsteorin.

- Låt $(\mathbf{R}, \mathcal{B}(\mathbf{R}), P_X)$ vara ett sannolikhetsrum, där P_X alltså är fördelningen för en s.v. X, och låt λ vara Lebesgue-måttet på $(\mathbf{R}, \mathcal{B}(\mathbf{R}))$. Om P_X är absolutkontinuerligt med avseende på λ så finns,enligt radon-Nikodym's sats, en $\mathcal{F}$-mätbar funktion f sådan att

  $$P_X(A) = \int_A f \, d\lambda =: \int_A f \, dx,$$

  för alla Borelmängder A. Speciellt för $A = (-\infty, x]$ får vi

  $$P_X(-\infty, x] = F(x) = \int_{-\infty}^{x} f \, dx.$$

  Funktionen f kallas täthetsfunktionen för den s.v. X. Observera att denna är entydigt bestämd så när som på en mängd i $\mathbf{R}$ med Lebesgue-mått 0.

- Om ν är måttet som räknar antalet heltal i en Borelmängd och P_X är absolutkontinuerligt med avseende på ν, så finns en $\mathcal{F}$-mätbar funktion f sådan att

  $$P_X(A) = \int_A f\, d\nu = \sum_{i \in A} f(i).$$

  För $A = (-\infty, x]$ fås att

  $$P_X(-\infty, x] = F(x) = \sum_{i \leq x} f(i).$$

  Funktionen f kallas sannolikhetsfunktionen för den s.v. X. Denna är entydigt bestämd så när som på en mängd med räknemått 0, dvs den är entydigt bestämd på alla mängder som endast innehåller heltalspunkter.

Nästa resultat är intuitivt klart.

Sats 9 Låt ν, μ vara två mått på $(\Omega, \mathcal{F})$, och f en positiv $\mathcal{F}$-mätbar funktion sådan att

$$\nu(A) = \int_A f\, d\mu,$$

för varje A i $\mathcal{F}$. Då är för varje positiv $\mathcal{F}$-mätbar funktion g

$$\int g\, d\nu = \int gf\, d\mu.$$

I våra tillämpningar är den viktigaste användningen av detta resultat nästa följdsats. Den ger oss de formler som används för att beräkna väntevärden i grundkurserna.

Corollarium 2 Låt λ vara Lebesgue-måttet på $(\mathbf{R}, \mathcal{B}(\mathbf{R}))$, och P_X en fördelning för den s.v. X. Anta att det finns en täthet f, det vill säga för varje Borelmängd A gäller

$$P_X(A) = \int_A f\, dx.$$

Då är för varje Lebesgue-integrebar funktion g

$$\int g(x)\, dF(x) := \int g(x)\, dP_X(x) = \int g(x) f(x)\, dx.$$

Om ν är måttet som räknar antalet heltal i en Borelmängd, och det finns en sannolikhetsfunktion så är för varje absolut summerbar funktion g, eller ekvivalent för varje g sådant att $\int g\, d\nu < \infty$,

$$\int g(x)\, dF(x) := \int g(x)\, dP_X(x) = \int g(x) f(x)\, d\nu = \sum g(i) f(i).$$

2.7 Väntevärden och $\mathcal{L}^p$-rum

Låt $X \in \mathcal{L}^1(\Omega, \mathcal{F}, P)$ vara en s.v. Definiera väntevärdet av X genom

$$E(X) = \int X(\omega)\, dP(\omega).$$

För $1 \leq p < \infty$ säger vi att $X \in \mathcal{L}^p(\Omega, \mathcal{F}, P)$ om X är en s.v. och

$$E(|X|^p) = \int |X|^p(\omega)\, dP(\omega) < \infty.$$

Då kan vi definiera

$$||X||_p = (\int |X|^p(\omega)\, dP(\omega))^{1/p}.$$

Observera att även om detta har fått en beteckning som antyder att det är en norm behöver vi visa det.

Det är lätt att visa att $\mathcal{L}^p(\Omega, \mathcal{F}, P)$ är ett linjärt rum. Följande monotonicitetsegenskap hos de linjära rummen $\mathcal{L}^p(\Omega, \mathcal{F}, P)$ är ofta användbar.

Sats 10 Om $1 \leq p \leq r < \infty$ och $X \in \mathcal{L}^r(\Omega, \mathcal{F}, P)$ så $X \in \mathcal{L}^p(\Omega, \mathcal{F}, P)$.

Om vi tittar speciellt på rummet $\mathcal{L}^2(\Omega, \mathcal{F}, P)$ så består det alltså av s.v. X sådana att

$$\int |X|^2\, dP = E(|X|^2) < \infty,$$

dvs av kvadratiskt integrerbara s.v., eller s.v. som har ändlig varians. För dessa gäller Schwarz olikhet; om $Y, X \in \mathcal{L}^2(\Omega, \mathcal{F}, P)$ så $X \cdot Y \in \mathcal{L}^1(\Omega, \mathcal{F}, P)$ och

$$|E(XY)| \leq ||X||_2 ||Y||_2.$$

En följd av denna är triangelolikheten i $\mathcal{L}^2(\Omega, \mathcal{F}, P)$;

$$||X + Y||_2 \leq ||X||_2 + ||Y||_2.$$

Det är också lätt att se att

$$||\alpha X||_2 = |\alpha| \cdot ||X||_2.$$

För att visa att $|| \cdot ||_2$ är en norm behöver vi nu bara visa att $||X||_2 \geq 0$ med likhet om och endast om $X = 0$. Här stöter vi dock på problem eftersom vi kan ha att $X = 0$ överallt utom på en mängd med P-mått noll och ändå få $||X||_2 = 0$. Detta går dock att lösa genom att betrakta alla s.v. som är lika n.s. som en ekvivalensklass. Klassen kan då representaras av vilken som helst av sina medlemmar; de har alla samma norm. Om vi gör detta får vi ett normerat linjärt rum. Man brukar skriva L istället för $\mathcal{L}$ för att tala om att man har gjort denna indelning i ekvivalensklasser. $L^2(\Omega, \mathcal{F}, P)$ består alltså av en massa ekvivalensklasser av s.v. som är kvadratiskt integrerbara. Det är ett linjärt rum och vi har visat att $|| \cdot ||_2$ är en norm på det. Vi har desutom en skalärprodukt

$$(X, Y) = E(XY).$$

Vi kan göra denna indelning i ekvivalensklasser för $1 \leq p < \infty$ och får då alltså normerade linjära rum $L^p(\Omega, \mathcal{F}, P)$. Fallet $p = 2$ är här dock speciellt eftersom vi på det dessutom har definierat en skalärprodukt.

Triangelolikheten i $L^p(\Omega, \mathcal{F}, P)$ kallas Minkowski's olikhet; om $f, g \in L^p(\Omega, \mathcal{F}, P)$ så

$$||f + g||_p \leq ||f||_p + ||g||_p$$

De linjära rummen $L^p(\Omega, \mathcal{F}, P)$ är fullständiga;

Sats 11 Om $1 \leq p < \infty$ och $\{X_n\}$ är en Cauchy-följd av s.v. i $L^p(\Omega, \mathcal{F}, P)$;

$$||X_n - X_m||_p \to 0 \ \ ; n, m \to \infty,$$

så finns ett X i $L^p(\Omega, \mathcal{F}, P)$ sådant att

$$||X_n - X||_p \to 0 \ \ ; n \to \infty.$$

Detta betyder alltså att $L^p(\Omega, \mathcal{F}, P)$ är ett Banachrum och att $L^2(\Omega, \mathcal{F}, P)$ är ett Hilbertrum.

Låt nu P_X vara fördelningen för X och låt

$$h : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$$

vara en Borelmätbar funktion. Då gäller att $h(X) \in L^1(\Omega, \mathcal{F}, P)$ om och endast om $h \in L^1(\mathbf{R}, \mathcal{B}(\mathbf{R}), P_X)$ och

$$E(h(X)) = \int h(X)(\omega)\, dP(\omega) = \int h(x)\, dP_X(x).$$

Om X har täthet f så kan vi skriva om resultatet som att

$$E(h(X)) = \int h(x) f(x)\, dx.$$

2.8 Fubini's sats

När får man byta ordning på integration? Låt $(\Omega_1, \mathcal{F}_1, \mu_1)$ och $(\Omega_2, \mathcal{F}_2, \mu_2)$ vara två måttrum med μ_1, μ_2 σ-ändliga rum. Då gäller att för en funktion f på $\Omega_1 \times \Omega_2$ som är mätbar med avseende på en lämplig σ-algebra (produkt-σ-algebran) är

$$\int \int f(x_1, x_2)\, d\mu_1(x_1) d\mu_2(x_2) = \int \int f(x_1, x_2)\, d\mu_2(x_2) d\mu_1(x_1),$$

om

$$\int \int |f|\, d\mu_1 d\mu_2 = \int \int |f|\, d\mu_2 d\mu_1 < \infty.$$

2.9 Oberoende

Låt $(\Omega, \mathcal{F}, \mu)$ vara ett sannolikhetsrum. Om $\mathcal{G}$ och $\mathcal{H}$ är två delσ-algebror av $\mathcal{F}$ så sägs $\mathcal{G}$ och $\mathcal{H}$ vara oberoende om

$$\mu(G \cap H) = \mu(G)\mu(H)$$

för alla $G \in \mathcal{G}$ och $H \in \mathcal{H}$. Om X och Y är två stokastiska variabler sägs de vara oberoende om $\sigma(X)$ och $\sigma(Y)$ är oberoende.

2.10 Betingade väntevärden

Låt X vara en s.v. i $L^1(\Omega, \mathcal{F}, P)$ och låt $\mathcal{G}$ vara en del σ-algebra till $\mathcal{F}$. Då defineras det betingade väntevärdet av x givet $\mathcal{G}$, $E(X|\mathcal{G})$ som den s.v. Y som satisfierar

1. Y är $\mathcal{G}$-mätbar.

2. $\int |Y|\, dP < \infty$.

3. För varje $G \in \mathcal{G}$ gäller $\int_G Y\,dP = \int_G X\,dP$.

Att det verkligen existerar ett sådant Y visades av Kolmogorov 1933 (se Williams). Om speciellt $X \in L^2(\Omega, \mathcal{F}, P)$ så kan man se Y som projektionen av X på $L^2(\Omega, \mathcal{G}, P)$, dvs

$$Y = \operatorname{argmin}_{Z \in L^2(\Omega,\mathcal{G},P)} \int (X - Z)^2\,dP.$$

Om $\mathcal{G} = \sigma(Z)$ så skriver vi $E(X|\mathcal{G}) = E(X|Z)$.

2.11 Stokastiska mått

I statistikteorin spelar den empiriska fördelningsfunktionen en stor roll. Givet oberoende likafördelade stokastiska variabler $X_1, \ldots, X_n$ och givet $x \in \mathbf{R}$ definieras denna som

$$F_n(x) = \sum_{i=1}^{n} 1_{\{X_i \le x\}}.$$

För fixt x är $F_n(x)$ alltså en linjärkombination av stokastiska variabler och alltså en stokastisk variabel. Vi ska här definera integralen av en funktion med avseende på F_n. Vi börjar med att införa stokastiska mått.

Definition 11 Låt $(\Omega, \mathcal{F})$ och $(\Gamma, \mathcal{G})$ vara två mätbara rum. Låt μ vara en σ-additiv mängdfunktion på $\mathcal{G}$ sådan att

$$\mu(G)$$

är $\mathcal{F}$-mätbar för varje G i $\mathcal{G}$, dvs för varje Borelmängd B i $\mathbf{R}$ gäller att

$$\mu(G)^{-1}(B) \in \mathcal{F}.$$

Då kallas μ ett stokastiskt mått på $(\Gamma, \mathcal{G})$.

En stokastiskt mått är alltså ett mått som för varje måttvärde $\mu(B)$ är en stokastisk variabel.

Exempel 13 Låt X vara en stokastisk variabel på $(\Omega, \mathcal{F})$. Definera mängdfunktionen μ på $\mathcal{B}(\mathbf{R})$ genom

$$\mu(B) = 1_{\{X \in B\}}.$$

Då är $\mu(B)$ ett eller noll, beroende på om B innehåller X eller inte.

För varje fixt B i $\mathcal{B}(\mathbf{R})$ är då $\mu(B) = 1_{\{X \in B\}}$ mätbar med avseende på σ-algebran $\mathcal{F}$. Ty för varje B^* i $\mathcal{B}(\mathbf{R})$ gäller exakt en av följande utsagor;

$$\begin{aligned}
0 \in B^*, 1 \in B^* \quad &\Rightarrow \quad \mu(B)^{-1}(B^*) = \{\omega : \mu(B)(\omega) \in B^*\} = \{\omega : 1_{\{X(\omega) \in B\}} \in B^*\} \\
&\qquad = \{\omega : X(\omega) \in B\} \cup \{\omega : X(\omega) \notin B\} = \Omega \in \mathcal{F}, \\
0 \notin B^*, 1 \in B^* \quad &\Rightarrow \quad \mu(B)^{-1}(B^*) = \{\omega : 1_{\{X(\omega) \in B\}} \in B^*\} = \{\omega : X(\omega) \in B\} \in \mathcal{F}, \\
0 \in B^*, 1 \notin B^* \quad &\Rightarrow \quad \mu(B)^{-1}(B^*) = \{\omega : 1_{\{X(\omega) \in B\}} \in B^*\} = \{\omega : X(\omega) \notin B\} \in \mathcal{F}, \\
0 \notin B^*, 1 \notin B^* \quad &\Rightarrow \quad \mu(B)^{-1}(B^*) = \{\omega : 1_{\{X(\omega) \in B\}} \in B^*\} = \\
&\qquad \{\omega : X(\omega) \in B\} \cap \{\omega : X(\omega) \notin B\} = \emptyset \in \mathcal{F}.
\end{aligned}$$

Vi har visat att $\mu(B)$ är $\mathcal{F}$-mätbar för varje B i Borel-σ-algebran på $\mathbf{R}$ och μ är således ett stokastiskt mått.

Observera att i exemplet ovan var $(\Gamma, \mathcal{G})$ lika med det mätbara rummet $(\mathbf{R}, \mathcal{B})$, och detta är det enklaste fallet. Vilket rum vi får beror av vad det är för stokastiska objekt vi betraktar. Stokastiska processer skulle till exempel ge Γ lika med ett funktionsrum.

Vi ska nu definiera integralen av en $\mathcal{G}$-mätbar funktion ϕ med avseende på det stokastiska måttet μ. Vi gör detta i fyra steg, analogt med fallet då då μ var ett vanligt mått .

Steg 1 Låt $\phi = 1_{\{G\}}$ vara indikatorfunktionen av en mängd i $\mathcal{G}$. Då defineras

$$\int \phi(\gamma)\, d\mu(\gamma) = \mu(G).$$

Denna är trivialt $\mathcal{F}$-mätbar så att integralen är här $\mathcal{F}$-mätbar.

Steg 2 Låt ϕ vara en enkel funktion, dvs med $n < \infty$, $G_i \in \mathcal{G}$ och $\alpha_i \in [0, \infty], 1 \leq i \leq n$ kan ϕ skrivas som

$$\phi(\gamma) = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i 1_{\{G_i\}}(\gamma).$$

Då definieras integralen av ϕ med avseende på det stokastiska måttet μ som

$$\int \phi(\gamma)\, d\mu(\gamma) = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i \mu(G_i).$$

Detta är en linjärkombination av $\mathcal{F}$-mätbara funktioner så att integralen är $\mathcal{F}$-mätbar. Linearitet och monotonicitet följer nu enkelt för den definierade integralen. Kom ihåg att i fallet när μ var ett ickestokastiskt mått definierade vi integralen av en positiv och mätbar funktion ϕ som

$$\int \phi\, d\mu = \sup\{\int h\, d\mu : h \leq \phi, h \text{ enkla}\}.$$

I det fallet överensstämmer naturligtvis definitionen med

$$\int \phi\, d\mu = \limsup_{n\to\infty} \int h_n\, d\mu,$$

på grund av integralens monotonicitet för enkla funktioner. Vi tar detta som definition när μ är ett stokastiskt mått.

Steg 3 Definition 12 Låt ϕ vara en positiv och $\mathcal{G}$-mätbar funktion. Låt $\{h_n\}$ vara en sekvens av enkla $\mathcal{G}$-mätbara funktioner som växer mot ϕ. Då definieras

$$\int \phi\, d\mu = \limsup_{n\to\infty} \int h_n\, d\mu$$

Eftersom $\int h_n\, d\mu$ är en sekvens av $\mathcal{F}$-mätbara funktioner, och lim sup av sådana är $\mathcal{F}$-mätbar har vi följande resultat.

Lemma 1 Integralen av en positiv och $\mathcal{G}$-mätbar funktion ϕ med avseende på ett stokastiskt mått μ är $\mathcal{F}$-mätbar.

Det är även lätt att se att integralen är lineär och monoton i ϕ; med α_1, α_2 positiva och ϕ_1, ϕ_2 positiva och $\mathcal{F}$-mätbara gäller för varje $\omega \in \Omega$ att

$$(\int \alpha_1\phi_1 + \alpha_2\phi_2\, d\mu)(\omega) = \alpha_1(\int \phi_1\, d\mu)(\omega) + \alpha_2(\int \phi_2\, d\mu)(\omega),$$

och

$$\phi_1 \le \phi_2 \Rightarrow (\int \phi_1\, d\mu)(\omega) \le (\int \phi_2\, d\mu)(\omega).$$

Steg 4 Om slutligen ϕ är en allmän $\mathcal{G}$-mätbar funktion kan vi dela upp den i

$$\phi^+(\gamma) = \max\{0, \phi(\gamma)\},\ \phi^-(\gamma) = -\min\{0, \phi(\gamma)\}.$$

Det är då klart att ϕ^+, ϕ^- är positiva och $\mathcal{G}$-mätbara så att vi kan definiera

$$I^+(\phi) = \int \phi^+\, d\mu,\ I^-(\phi) = \int \phi^-\, d\mu.$$

Om $I^+(\phi)(\omega) < \infty$ och $I^-(\phi)(\omega) < \infty$ för varje $\omega \in \Omega$ säger vi att ϕ är μ-integrerbar.

Detta är dock ibland en onödigt restriktiv definition.

Definition 13 Låt ν vara ett godtyckligt ickestokastiskt mått på $(\Omega, \mathcal{F})$. Då säger vi att ϕ är μ-integrerbar ν-nästan säkert om det finns en mängd $A \in \mathcal{F}$ sådan att $\nu(A) = 1$ och $I^+(\phi)(\omega) < \infty$, $I^-(\phi)(\omega) < \infty$ för $\omega \in A$. Vi definierar integralen

$$\int \phi\, d\mu = I^+(\phi) - I^-(\phi).$$

Det viktigaste exemplet i denna kurs på integration av en funktion med avseende på ett stokastiskt mått är följande.

Exempel 14 Låt $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ vara ett sannolikhetsrum och låt $X_1, \ldots, X_n$ vara en sekvens av oberoende stokastiska variabler, alla med samma fördelning P_X. Definiera den empiriska fördelningen P_n som mängdfunktionen på $\mathcal{B}(\mathbf{R})$

$$P_n(B) = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} 1_{\{X_i \in B\}},$$

för $B \in \mathcal{B}(\mathbf{R})$. Eftersom P_n är en linjärkombination av stokastiska mått följer att P_n är ett stokastiskt mått på $\mathcal{B}(\mathbf{R})$. Om ϕ är en godtycklig $\mathcal{B}(\mathbf{R})$-mätbar funktion och A är en Borelmängd, sådan att $P_X(A) = 1$ och

$$\int \phi^+(x)\, dP_n(x) < \infty, \quad \int \phi^+(x)\, dP_n(x) < \infty,$$

kan vi definiera

$$\int \phi(x)\, dP_n(x).$$

Enligt ovanstående är detta en $\mathcal{B}(\mathbf{R})$-mätbar funktion dvs en stokastisk variabel, som är ändlig P_X-nästan säkert. Man ser att

$$\int \phi(x)\, dP_n(x) = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} \phi(X_i).$$

Den empiriska fördelningsfunktionen F_n definieras som restriktionen av det stokastiska måttet P_n till π-systemet $\{(-\infty, x] : x \in \mathbf{R}\}$. Vi definierar integralen av ϕ med avseende på F_n som

$$\int \phi(x)\, dF_n(x) = \int \phi(x)\, dP_n(x).$$

2.12 Integralen som en linjär funktional

Givet ett måttrum $(\Omega, \mathcal{F}, \mu)$, och en $\mathcal{F}$-mätbar funktion ϕ har vi definierat integralen av ϕ med avseende på måttet μ och visat att den är linjär i ϕ. Det är dock också sant att integralen är lineär i måttet. Vi behöver dock först definiera addition och multiplikation med skalär på rummet av mått.

Definition 14 Om ν, μ är två mått på måttrummet $(\Omega, \mathcal{F})$ och $A \in \mathcal{F}$ definierar vi summan $\nu + \mu$ som

$$(\nu + \mu)(A) = \nu(A) + \mu(A).$$

Om α är ett positivt reellt tal definierar vi $\alpha\mu$ som

$$(\alpha\mu)(A) = \alpha\mu(A).$$

Det är klart att $\mu + \nu$ och $\alpha\mu$ är två nya mått.

Om $\mathcal{M}$ är en mängd av mått, kan vi definiera operationerna addition och multiplikation med skalär, enligt ovan. Försett med dessa operationer blir $\mathcal{M}$ ett linjärt rum.

Sats 12 Låt $(\Omega, \mathcal{F})$ vara ett mätbart rum och μ, ν två mått på det. Anta att den $\mathcal{F}$-mätbara funktionen ϕ är integrerbar både med avseende på ν och μ. Då är den integrerbar med avseende på måttet $\nu + \mu$ och

$$\int \phi\, d(\nu + \mu) = \int \phi\, d\nu + \int \phi\, d\mu.$$

Om α är ett positivt reellt tal, så är ϕ integrerbar med avseende på $\alpha\mu$ och

$$\int \phi\, d(\alpha\mu) = \alpha \int \phi\, d\mu.$$

Bevis: Lämnas som en övning. Det gäller att visa lineariteten för ϕ indikatorfunktion, enkel funktion, positiv mätbar funktion och slutligen integrerbar mätbar funktion. Det händer inget principiellt nytt vad gäller lineariteten om vi låter ν, μ var stokastiska mått, så ovanstående sats är sann även med ν, μ stokastiska mått. Vi har alltså följande resultat.

Sats 13 Låt $(\Omega, \mathcal{F})$, $(\Gamma, \mathcal{G})$ vara två måttrum och $\mathcal{M}$ en mängd med stokastiska mått på $\mathcal{G}$ försedd med addition och multiplikation. Då är $\mathcal{M}$ ett linjärt rum. Låt ν vara ett vanligt ickestokastiskt mått, och ϕ en $\mathcal{G}$-mätbar funktion som är integrerbar ν-nästan säkert med avseende på μ för varje $\mu \in \mathcal{M}$. Då definierar avbildningen

$$\mathcal{M} \ni \mu \to \int \phi\, d\mu$$

en linjär funktional. Bildmängden ligger i rummet av $\mathcal{F}$-mätbara funktioner.

En viktig följd av denna sats är att om $\mathcal{N}$ är en mängd av fördelningsfunktioner så definierar avbildningen

$$\mathcal{N} \ni F \to \int \phi\, dF \in \mathbf{R}$$

en linjär funktional.