Föreläsning 11
Matematisk statistik 7.5hp för E
Mer om hypotestest

Stas Volkov

Exempel: Rattonykterhet — styrka

Modell: $\mu^* = \bar{X} \in \mathsf{N}\left(\mu, 0.04/\sqrt{n}\right)$. $H_0: \mu = \mu_0$, $H_1: \mu > \mu_0$.

Test: Förkasta $H_0: \mu = \mu_0$ om $\dfrac{\mu^* - \mu_0}{0.04/\sqrt{n}} > \lambda_\alpha$, dvs om $\mu^* > \mu_0 + \lambda_\alpha \cdot \dfrac{0.04}{\sqrt{n}}$.

Styrka: Styrkefunktionen för testet ges av

$$
\begin{aligned}
h(\mu) &= \mathsf{P}(H_0 \text{ förkastas om } \mu \text{ är det sanna värdet}) \\
&= \mathsf{P}\left(\frac{\mu^* - \mu_0}{0.04/\sqrt{n}} > \lambda_\alpha \text{ om } \mu^* \in \mathsf{N}\left(\mu, \frac{0.04}{\sqrt{n}}\right)\right) \\
&= \mathsf{P}\Bigg(\underbrace{\frac{\mu^* - \mu}{0.04/\sqrt{n}}}_{\mathsf{N}(0,1)} > \frac{(\mu_0 + \lambda_\alpha \cdot \frac{0.04}{\sqrt{n}}) - \mu}{0.04/\sqrt{n}}\Bigg) \\
&= 1 - \Phi\left(\frac{\mu_0 - \mu}{0.04/\sqrt{n}} + \lambda_\alpha\right) = 1 - \Phi\left(\lambda_\alpha - 25\sqrt{n}\,(\mu - \mu_0)\right)
\end{aligned}
$$

Olika metoder för att utföra hypotestest

- **Direktmetoden eller P-värde**
  - Antag att H_0 är sann
  - Räkna ut **P-värdet** $p = \mathsf{P}(\text{Få det vi fått eller värre})$
  - Om $p < \alpha$ förkastas H_0
- **Konfidensmetoden**. Gör ett konfidensintervall med konfidensgraden $1 - \alpha$ och förkasta H_0 på nivån α om intervallet ej täcker ϑ_0. Intervallen skall, beroende på H_1, vara

Test	$H_1 : \vartheta < \vartheta_0$	$H_1 : \vartheta \neq \vartheta_0$	$H_1 : \vartheta > \vartheta_0$
Intervall:	uppåt begr	tvåsidigt	nedåt begr

- **Testkvantitet $T(X)$ och kritiskt område C** Förkasta H_0 om testskvantiteten hamnar i det kritiska området.
  C och T skall väljas så att

$$\alpha = P(T(X) \in C) = P(\text{"Förkasta } H_0 \text{ om } H_0 \text{ är sann"})$$

Hypotestest – Vilken metod?

- (Approx.) Normalfördelad skattning där $\mathsf{D}(\vartheta^*)$ innehåller σ:

  σ känd: Vilken som helst. ☺

  σ okänd: Direktmetoden kräver t-fördelningens fördelningsfunktion.

- Bin, Po, ... där $\mathsf{D}(\vartheta^*)$ innehåller ϑ.

  Direktmetoden: **Går alltid** att använda, ibland med normalapproximation.

  Testkvantitet: Kräver normalt **normalapproximation**.

  Kritiskt området: Kan behöva **normalapproximation**.

  Konfidensintervallmetoden: Fungerar **inte.** ☹

Vid **styrkefunktion** är det naturligt att **utgå från testkvantitet eller kritiskt område**.

Testkvantiteter

Antag att vi vill testa $H_0: \ \vartheta = \vartheta_0$.

Model		Skattning	$T(X)$	$D(\vartheta^*)$	$d(\vartheta^*)$	kvantil
$X_i \in \mathrm{N}(\mu, \sigma)$	σ känd	$\mu^* = \bar{X}$	$\frac{\mu^* - \mu_0}{\mathrm{D}(\mu^*)}$	$\frac{\sigma}{\sqrt{n}}$	-	λ
	σ okänd		$\frac{\mu^* - \mu_0}{d(\mu^*)}$	-	$\frac{s}{\sqrt{n}}$	$t(f)$
$X \in \mathrm{Bin}(n, p)$		$p^* = \frac{X}{n}$	$\frac{p^* - p_0}{\mathrm{D}_0(p^*)}$	$\sqrt{\frac{p_0(1-p_0)}{n}}$	-	λ
$X_i \in \mathrm{Po}(\mu)$		$\mu^* = \bar{X}$	$\frac{\mu^* - \mu_0}{\mathrm{D}_0(\mu^*)}$	$\sqrt{\frac{\mu_0}{n}}$	-	λ

Notera:

- Skattningarnas standardavvikelse/mdlfel räknas under H_0.
- Bin och Po fallet kräver normalapproximation.
- α-kvantil om ensidigt; $\alpha/2$-kvantil om tvåsidigt.

Exempel 1: Smältpunkt

Stickprov av mycket rent järn berett med två olika metoder A och B hade följande smältpunkter i $^\circ C$:

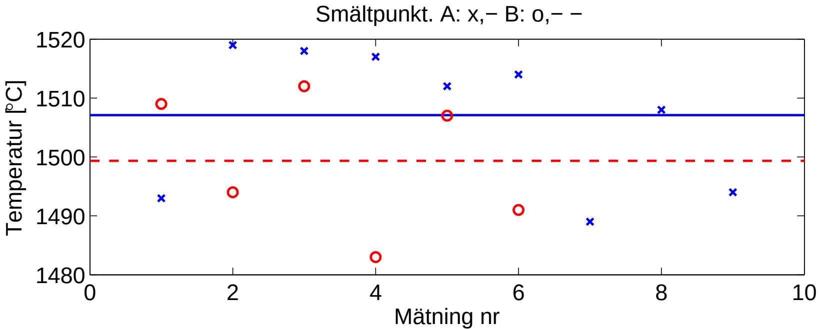
A	1493	1519	1518	1517	1512	1514	1489	1508	1494
B	1509	1494	1512	1483	1507	1491			

Formulera en statistisk modell baserad på normalfördelning och lika varians.

a) Konstruera ett konfidensintervall för skillnaden mellan de två medelsmältpunkterna med konfidensgrad på 95%.

b) Testa hypotesen att de olika metoderna ger samma medelsmältpunkter.

Exempel 1


Smältpunkt. A: x,− B: o,− −
1520
1510
1500
1490
1480
Temperatur [°C]
0
2
4
6
8
10
Mätning nr

1. Modell och problemformulering

Två oberoende stickprov!
Vi har $n_x = 9$ observationer från

$$X_i = \text{"smältpunkt vid metod A"} \in \mathsf{N}\left(\mu_x, \sigma\right)$$

och $n_y = 6$ observationer från

$$Y_i = \text{"smältpunkt med metod B"} \in \mathsf{N}\left(\mu_y, \sigma\right).$$

Vi vill göra ett 95 % konfidensintervall för $\mu_x - \mu_y$ och testa $H_0 : \mu_x = \mu_y$ mot $H_1 : \mu_x \neq \mu_y$ på signifikansnivån $\alpha = 5\,\%$.

2. Skattning

Vi skattar

$$\mu_x^* = \bar{x} = 1507.1, \qquad \mu_y^* = \bar{y} = 1499.3,$$
$$(\mu_x - \mu_y)^* = \mu_x^* - \mu_y^* = \bar{x} - \bar{y} = 1507.1 - 1499.3 = 7.8.$$

Vi har också $\sigma^* = s_x = 11.9$ och $\sigma^* = s_y = 11.6$ så att den sammanvägda σ-skattningen blir

$$\sigma^* = s_p = \sqrt{\frac{(n_x - 1)s_x^2 + (n_y - 1)s_y^2}{n_x - 1 + n_y - 1}}$$
$$= \sqrt{\frac{(9-1)\cdot 11.9^2 + (6-1)\cdot 11.6^2}{9 - 1 + 6 - 1}} = 11.8$$

som har $f = (n_x - 1) + (n_y - 1) = 13$ frihetsgrader.

3. Egenskaper

Eftersom alla X_i och Y_i är oberoende av varandra har vi att

$$\mu_x^* = \bar{X} \in N\left(\mu_x, \frac{\sigma}{\sqrt{n_x}}\right), \qquad \mu_y^* = \bar{Y} \in N\left(\mu_y, \frac{\sigma}{\sqrt{n_y}}\right),$$

$$\mu_x^* - \mu_y^* \in N\left(\mu_x - \mu_y, \sigma\sqrt{\frac{1}{n_x} + \frac{1}{n_y}}\right) = N\left(\mu_x - \mu_y, \sigma\sqrt{\frac{1}{9} + \frac{1}{6}}\right).$$

Om $H_0 : \mu_x = \mu_y$ är sann så gäller att

$$\mu_x^* - \mu_y^* \in N\left(0, \sigma\sqrt{\frac{1}{9} + \frac{1}{6}}\right).$$

Eftersom σ är okänt och skattas med $s_p = 11.8$ blir medelfelet

$$d(\mu_x^* - \mu_y^*) = s_p\sqrt{\frac{1}{n_x} + \frac{1}{n_y}} = 11.8\sqrt{\frac{1}{9} + \frac{1}{6}} = 6.2$$

4. Lösning och Slutsats

4(a) **Konfidensintervall**
Eftersom s_p har $f = 13$ frihetsgrader ges ett tvåsidigt $95\,\%$ konfidensintervall för $\mu_x - \mu_y$ av

$$\begin{aligned} I_{\mu_x-\mu_y} &= \mu_x^* - \mu_y^* \pm t_{\alpha/2}(f) \cdot d(\mu_x^* - \mu_y^*) \\ &= 7.8 \pm \underbrace{t_{0.025}(13)}_{2.16} \cdot 11.8\sqrt{\frac{1}{9} + \frac{1}{6}} = (-5.6,\ 21.2). \end{aligned}$$

4(b) **Hypotestest:** Eftersom $H_0 : \mu_x - \mu_y = 0$ ligger i intervallet kan H_0 inte förkastas.

- **Slutsats:** Vi kan inte påstå att smältpunkterna är olika.

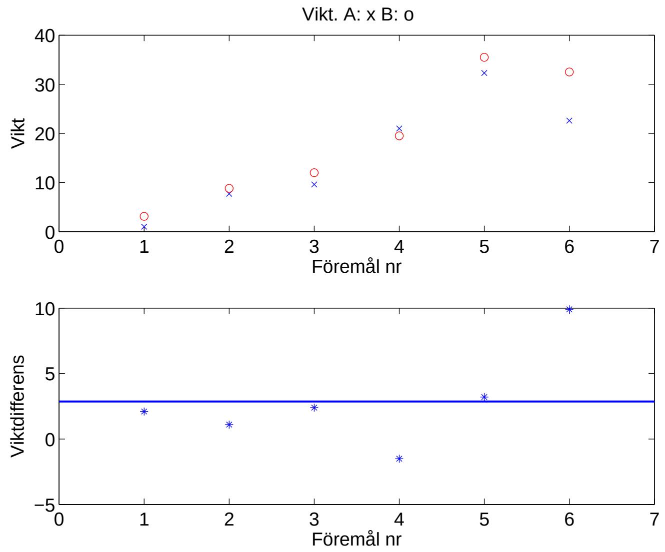
Exempel 2: Våg

Man har två vågar, A och B, där man misstänker att våg B har ett systematiskt fel så att den ger för högt utslag; medan man vet att våg A väger rätt i medeltal. Man vägde 6 föremål på båda vågarna och fick nedanstående resultat (kg):

Föremål, i	1	2	3	4	5	6
våg A, x_i	1.0	7.7	9.6	21.0	32.3	22.6
våg B, y_i	3.1	8.8	12.0	19.5	35.5	32.5

Sätt upp en lämplig modell för data, baserad på normal- fördelning och avgör om våg B ger **för högt utslag** i medeltal.

Exempel 2


Vikt. A: x B: o
Vikt
40
30
20
10
0
0 1 2 3 4 5 6 7
Föremål nr
Viktdifferens
10
5
0
−5
0 1 2 3 4 5 6 7
Föremål nr

Ex.2 lösning

- **Modell och problem:**
  Stickprov i par med $n = 6$ observationer av
  $$X_i = \text{våg A för föremål nr. } i$$
  $$Y_i = \text{våg B för föremål nr. } i$$
  där $E(X_i) = \mu_i$ och $E(Y_i) = \mu_i + \Delta$. Bilda
  $$Z_i = Y_i - X_i = \text{"våg B} - \text{våg A för föremål nr. } i\text{"} \in \mathsf{N}\left(\Delta, \sigma\right).$$
  Testa $H_0 : \Delta = 0$ mot $H_1 : \Delta > 0$ på signifikansnivå $\alpha = 5\,\%$.
- **Skattning:** $\Delta^* = \ldots, \qquad \sigma^* = \ldots, \qquad f = \ldots$
- **Egenskaper:**
  $\Delta^* \in \ldots, \qquad$ Om H_0 är sann så $\ldots, \qquad d(\Delta^*) = \ldots$
- **Lösning:** (Ett lämpligt ensidigt test med t-fördelning …)
  Eftersom … kan H_0 [förkastas/inte förkastas].
- **Slutsats:** [Ja/Nej], vi [kan/kan inte] påstå att våg B ger för högt utslag.

Exempel 3: Jordbävningar

Antalet jordskalv under ett år i ett område anses vara poissonfördelat med parametern μ, dvs om

$$X = \text{"antal jordskalv under ett år"}$$

gäller $X \in \mathsf{Po}(\mu)$. Antalet jordskalv olika år anses vara oberoende.

Den seismologiska aktiviteten har under en längre period varit ganska konstant med ett μ som anses vara 1.6.

Under perioden $1990 - 1999$ uppmättes emellertid 25 jordskalv i området. Tyder detta på att området blivit seismologiskt oroligt så att μ ökat?

Exempel 3: Lösning

- **Modell och problem:** Vi har egentligen $n = 10$ oberoende observationer av $X_i =$ "antal jordskalv under år i" $\in Po(\mu)$ men vi har bara noterat observationen $y = 25$ av

$$Y = \sum_{i=1}^{n} X_i = \text{"antal jordskalv på 10 år"} \in Po(n \cdot \mu) = Po(10\mu)$$

Vi vill testa $H_0 : \mu = 1.6$ mot $H_1 : \mu > 1.6$ på signifikansnivå $\alpha = 5\,\%$.
- **Skattning:** $\mu^* = \bar{x} = \frac{y}{n} = \frac{25}{10} = 2.5$.
- **Egenskaper:** Om H_0 är sann

$$Y \in Po(n\mu_0) = Po(10 \cdot 1.6) = Po(16)$$

Eftersom 16 är "stor" (> 15) kan man normalapproximera så att $Y \underset{\sim}{\in} N\left(16, \sqrt{16}\right)$.
- **Lösning:** (Lämpligt ensidigt test utan / med normalapproximation som utnyttjar $D_0(\mu^*)$ ....). Eftersom ... kan H_0 [förkastas / inte

Transformation av konfidensintervall

Har man ett konfidensintervall för en parameter ϑ

$$I_\vartheta = [a_1, a_2]$$

kan detta transformeras till ett intervall för $g(\vartheta)$ genom

$$I_{g(\vartheta)} = [g(a_1), g(a_2)]$$

om g är **monoton** (strängt växande $\nearrow$ eller strängt avtagande $\searrow$) i det område där ϑ är definierad.

Exempel. Ett intervall för $\beta =$"ökningen av järnhalten per meter" i ett vattendrag blev $I_\beta = [-0.0372, -0.0153]$. Transformera detta till ett intervall för minskningen av järnhalten per 100 meter.

Konfidensintervall för σ^2 i $N(\mu, \sigma)$

$x_1, \ldots, x_n$ observationer av $X_i \in N(\mu, \sigma)$

Ett $(1-\alpha)$ konfidensintervall för σ^2 ges av

$$I_{\sigma^2} = \left(\frac{(n-1)s^2}{\chi^2_{\alpha/2}(n-1)}, \frac{(n-1)s^2}{\chi^2_{1-\alpha/2}(n-1)} \right) = \left(\frac{Q}{\chi^2_{\alpha/2}(f)}, \frac{Q}{\chi^2_{1-\alpha/2}(f)} \right)$$

där

- $Q = \sum_{i=1}^{n} (x_i - \bar{x})^2$, $f = n-1$, och $s^2 = \frac{Q}{f}$
- $\chi^2_{\alpha/2}(n-1)$ är χ^2-fördelningens $\alpha/2$-kvantil (Tabell 4).
- Ett konfidensintervall för σ fås genom att dra roten ur gränserna i I_{σ^2}.