# Föreläsning 5, Matematisk statistik 7.5hp för E
# Linjärkombinationer

Stas Volkov

## Summa av två oberoende, $Z = X + Y$

$$p_Z(k) = \sum_{i+j=k} p_X(i) \cdot p_Y(j) = \sum_{i=-\infty}^{\infty} p_X(i) \cdot p_Y(k-i)$$

$$f_Z(z) = \int_{-\infty}^{\infty} f_X(x) \cdot f_Y(z-x)\, dx$$

## Maximum/Minimum av fler oberoende

$$Z = \max(X_1, \dots, X_n) \qquad F_Z(z) = \prod_{i=1}^{n} F_{X_i}(z)$$

$$Z = \min(X_1, \dots, X_n) \qquad F_Z(z) = 1 - \prod_{i=1}^{n} [1 - F_{X_i}(z)]$$

## Väntevärde

Väntevärdet anger **tyngdpunkten** för fördelningen

$$E(X) = \begin{cases} \sum_k k \cdot p_X(k) & \text{diskret} \\ \int_{-\infty}^{\infty} x \cdot f_X(x)\, dx & \text{kontinuerlig} \end{cases}$$

## Varians

Variansen anger hur utspridd $X$ är kring sitt väntevärde.

$$V(X) = E\left\{\left[X - E(X)\right]^2\right\} = E(X^2) - E(X)^2 \geq 0$$

**Standardavvikelse**, $D(X)$, $\sigma$, $\sigma_X$

$$D(X) = \sqrt{V(X)}$$

## Betingat väntevärde

Det **betingade väntevärdet** för $X$ givet att $Y = y$ blir (inget nytt)

$$E(X \mid Y = y) = \begin{cases} \sum_k k \cdot p_{X|Y=y}(k) & \text{diskret} \\ \int_{-\infty}^{\infty} x \cdot f_{X|Y=y}(x)\,dx & \text{kontinuerlig} \end{cases}$$

**Lagen om total förväntan**

$$E(E(X \mid Y)) = E(X), \quad \text{dvs}$$

$$E(X) = \begin{cases} \displaystyle\sum_k E(X \mid Y = k) \cdot p_Y(k) \\ \displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} E(X \mid Y = y) \cdot f_Y(y)\,dy \end{cases}$$

# Ex (forts): Om $f_{X,Y}(x,y) = e^{-y},\ 0 \le x \le y$

Vi hade tidigare att

$$
\begin{aligned}
f_{X|Y=y}(x) &= \frac{1}{y},\ 0 \le x \le y \qquad &&\text{dvs } X \mid Y = y \in R(0,\ 1) \\
f_{Y|X=x}(y) &= e^{-(y-x)},\ y \ge x &&\text{dvs } Y \mid X = x \in \ ''x + Exp(1)'' \\
f_X(x) &= e^{-x},\ x \ge 0 &&\text{dvs } X \in Exp(1) \\
f_Y(y) &= ye^{-y},\ y \ge 0 &&\text{dvs } X \in \Gamma(2, 1)
\end{aligned}
$$

- Vad blir $E(X \mid Y = y)$ och $E(Y \mid X = x)$?
- Vad blir $E(X)$ och $E(Y)$?

# Beroendemått

## Kovarians

**Kovarians**, $C(X, Y)$

$$C(X, Y) = E\{[X - E(X)][Y - E(Y)]\} = E(XY) - E(X) \cdot E(Y)$$

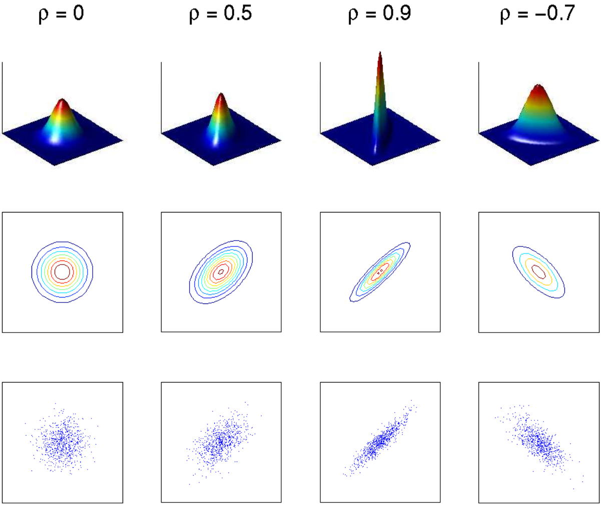
- Kovariansen anger hur mycket linjärt beroende som finns mellan $X$ och $Y$.
- Ur definitionen fås $C(X, X) = V(X)$
- $X$ och $Y$ oberoende $\Rightarrow C(X, Y) = 0$ dvs $X$ och $Y$ är **okorrelerade**.
- Men obs! $C(X, Y) = 0 \not\Rightarrow X$ och $Y$ oberoende

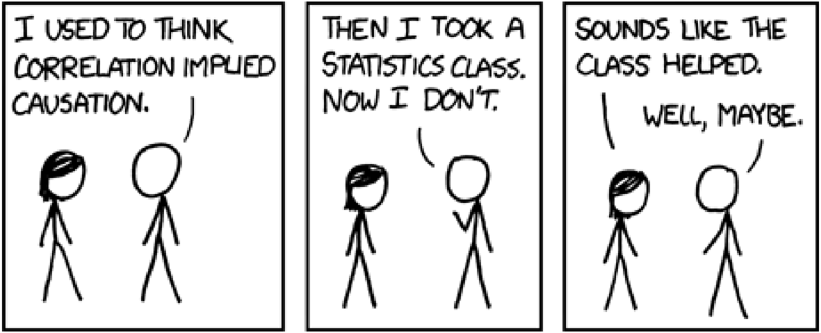
**Korrellationskoefficient**, $\rho$, $\rho_{X,Y}$

$$\rho_{X,Y} = \frac{C(X, Y)}{D(X)D(Y)}$$

- $-1 \leq \rho_{X,Y} \leq 1$ (p.g.a. Cauchy–Schwarz olikhet)

# Korrellation






Ex.: Civilingenjörer som tar doktorsexamen korrelerar med konsumtionen av mozzarellaost – åtminstone i USA. ($\rho = 0.96$)

Ex.: USA råolja import från Norge korrelerar med antalet bilförare dödades i kollision med tåg ($\rho = 0.95$)

# Linjärkombination

- $E(aX+b) = aE(X)+b$
- $V(aX+b) = a^2V(X)$
- $D(aX+b) = |a|D(X)$

## Allmänt

- $E\left(\sum_{i=1}^{n} a_iX_i\right) = \sum_{i=1}^{n} a_iE(X_i)$
- $V\left(\sum_{i=1}^{n} a_iX_i\right) = \sum_{i=1}^{n} a_i^2V(X_i) + \underbrace{2\sum_{i<j} a_ia_jC(X_i,X_j)}_{=0 \text{ om okorrelerade}}$

# Kovariansen är bilinjär

dvs linjär i båda argumenten (jfr polynommultiplikation)

$$C\left(\sum_j a_j X_j, \sum_k b_k Y_k\right) = \sum_j \sum_k a_j b_k C(X_j, Y_k)$$

Exempel:

1. Beräkna $E(X_1 + 2X_2)$ och $E(3Y_1 - 4Y_2)$
2. Beräkna $V(X_1 + 2X_2)$ och $V(3Y_1 - 4Y_2)$
3. Beräkna $C(X_1 + 2X_2, 3Y_1 - 4Y_2)$

# Specialfall av oberoende och likafördelade s.v.

Låt $E(X_i) = \mu, \quad V(X_i) = \sigma^2$
**Summa:** $Y = \sum_{i=1}^{n} X_i$

- $$E(Y) = E\left(\sum_{i=1}^{n} X_i\right) = \sum_{i=1}^{n} E(X_i) = \sum_{i=1}^{n} \mu = n\mu$$
- $$V(Y) = V\left(\sum_{i=1}^{n} X_i\right) = \sum_{i=1}^{n} 1^2 V(X_i) = \sum_{i=1}^{n} \sigma^2 = n\sigma^2$$

**Medelvärde:** $\bar{X}_n = \dfrac{1}{n} \displaystyle\sum_{i=1}^{n} X_i$

- $$E(\bar{X}_n) = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} E(X_i) = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} \mu = \frac{1}{n} \cdot n\mu = \mu$$
- $$V(\bar{X}_n) = \frac{1}{n^2} \sum_{i=1}^{n} V(X_i) = \frac{1}{n^2} \sum_{i=1}^{n} \sigma^2 = \frac{1}{n^2} \cdot n\sigma^2 = \frac{\sigma^2}{n}$$

# Exempel: Brädor

Kapa brädor med oberoende längder $X_i$. $E(X_i) = 1$ m och $V(X_i) = 0.1$ m$^2$. Bestäm $E(Y)$ och $V(Y)$ om $Y$ ges av:

a) sammanlagda längden av 10 stycken.

b) sammanlagda längden av en bräda och dess nio kloner (tag en bräda, kapa nio till exakt lika långa).

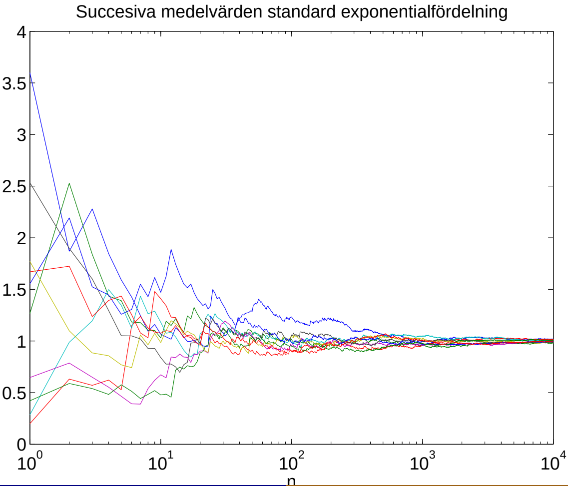
dvs....

a) $Y = X_1 + X_2 + \cdots + X_{10}$

b) $\tilde{Y} = \underbrace{X_1 + X_1 + \cdots + X_1}_{10 \text{ stycken}}$

# Tio oberoende realiseringar för succesiva medelvärden av standard exponential fördelning

Vi har här $E(X) = 1$.



# Stora talens lag

Om $X_1, X_2, \ldots, X_n$ är oberoende och likafördelade med $E(X_i) = \mu$ så gäller

$$P(|\bar{X}_n - \mu| > \varepsilon) \to 0, \; n \to \infty$$

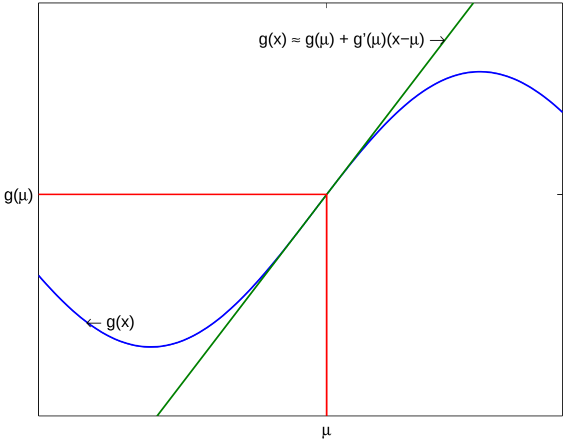
för alla $\varepsilon > 0$.
Det vill säga medelvärdet konvergerar *i sannolikhet* mot väntevärdet då $n$ växer mot oändligheten! (STL i svag form)

Vi har till och med att:

$$P\left(\left\{\lim_{n\to\infty} \bar{X}_n \text{ existerar och är lika med } \mu\right\}\right) = 1$$

(STL i stark form)

# Linjärisering av $g(x)$ kring punkten $\mu = E(X)$ (tangent)



## Gauss approximationsformler i en variabel

$Y = g(X)$. Taylorutveckla funktionen $g$ kring $\mu = E(X)$

$$g(X) \approx g(\mu) + (X - \mu) \cdot g'(\mu) \quad \Longrightarrow$$

- $E(Y) \approx g(E(X))$
- $V(Y) \approx (g'[E(X)])^2 \cdot V(X)$

# Exempel

Låt $E(X) = \mu$ och $V(X) = \sigma^2$.

a) Bestäm approximativt väntevärde och varians för $Y = g(X) = \pi X^2$.

b) Bestäm väntevärdet för $Y$ utan approximation.

Vi ser att approximationen av väntevärdet alltid är för liten men stämmer bra om $\sigma$ är liten i förhållande till $\mu$.

# Gauss approximationsformler i $n$ variabler

För en funktion av $n$ variabler fås på samma sätt
$Y = g(X_1, \dots, X_n)$

$$E(Y) \approx g(E(X_1), \dots, E(X_n))$$
$$V(Y) \approx \sum_{i=1}^{n} c_i^2\, V(X_i) + 2\sum_{i<j} c_i\, c_j\, C(X_i, X_j)$$

där $c_i = \dfrac{\partial g(x_1, x_2, \dots, x_n)}{\partial x_i}\Big|_{x_1=E(X_1),\dots,x_n=E(X_n)}$

# Gaussaproximation för två variabler

För en funktion av två variabler $g(X, Y)$ blir Gauss approximationsformler (med $E(X) = \mu_X, E(Y) = \mu_Y$)

$$\begin{aligned} E(g(X, Y)) &\approx g(\mu_X, \mu_y) \\ V(g(X, Y)) &\approx \left[g'_X(\mu_X, \mu_Y)\right]^2 V(X) + \left[g'_Y(\mu_X, \mu_Y)\right]^2 V(Y) \\ &\quad + 2\left[g'_X(\mu_X, \mu_Y)\right]\left[g'_Y(\mu_X, \mu_Y)\right] C(X, Y) \end{aligned}$$

där sista termen är noll då $X$ och $Y$ är okorrelerade.
$g'_X$ och $g'_Y$ är partiell derivata map $X$ resp. $Y$. Jämför detta med det generella uttrycket för en funktion av $n$ variabler.

# Exempel

Bestäm approximativa värden på variansen för $X \cdot Y$ och $X/Y$ om $X$ och $Y$ är oberoende av varandra. Uttryck svaren i $\mu_X$, $\mu_Y$, $V(X)$ och $V(Y)$.

1. $g(X,Y) = X \cdot Y$.
   $g'_X(X,Y) = Y$ och $g'_Y(X,Y) = X$.

$$V(X \cdot Y) \approx \left[g'_X(\mu_X,\mu_Y)\right]^2 V(X) + \left[g'_Y(\mu_X,\mu_Y)\right]^2 V(Y) =$$
$$= \mu_Y^2\, V(X) + \mu_X^2\, V(Y)$$

2. Antag $Y > c > 0$ och $g(X,Y) = \dfrac{X}{Y}$.
   $g'_X(X,Y) = \frac{1}{Y}$ och $g'_Y(X,Y) = -\frac{X}{Y^2}$.

$$V\left(\frac{X}{Y}\right) \approx \frac{1}{\mu_Y^2}\, V(X) + \frac{\mu_X^2}{\mu_Y^4}\, V(Y)$$