Föreläsning 4, Matematisk statistik 7.5hp för E
Summor och väntevärden

Stas Volkov

Tvådim. stokastisk variabel (X, Y)

Simultan fördelningsfunktion: $F_{X,Y}(x, y) = P(X \leq x, Y \leq y)$

Simultan sannolikhetsfunktion: $p_{X,Y}(j, k) = P(X = j, Y = k)$

Simultan täthetsfunktion: $f_{X,Y}(x, y) = \dfrac{\partial^2}{\partial x \partial y} F_{X,Y}(x, y)$

Några egenskaper:

- $P[(X, Y) \in A] = \sum_{(j,k) \in A} p_{X,Y}(j, k)$
- $P[(X, Y) \in A] = \iint_A f_{X,Y}(x, y)\, dxdy$
- $p_X(j) = \sum_k p_{X,Y}(j, k)$ Marginell slh.funkt. för X
- $f_Y(y) = \int_{-\infty}^{\infty} f_{X,Y}(x, y)\, dx$ Marginell täthet för Y

Fler egenskaper (för täthetsfunktioner)

- Betingad täthetsfunktion för X givet att $Y = y$

$$f_{X|Y=y}(x) = \frac{f_{X,Y}(x,y)}{f_Y(y)}$$

- X och Y är oberoende $\Longleftrightarrow$

$$f_{X,Y}(x,y) = f_X(x) \cdot f_Y(y) \quad \textbf{för alla}\, (x,y)$$

- Satsen om total sannolikhet

$$f_Y(y) = \int_{-\infty}^{\infty} f_{Y|X=x}(y) \cdot f_X(x)\, dx$$

- Bayes sats

$$f_{X|Y=y}(x) = \frac{f_{Y|X=x}(y) \cdot f_X(x)}{\int_{-\infty}^{\infty} f_{Y|X=z}(y) \cdot f_X(z)\, dz}$$

Summa av två oberoende, $Z = X + Y$

Diskret:

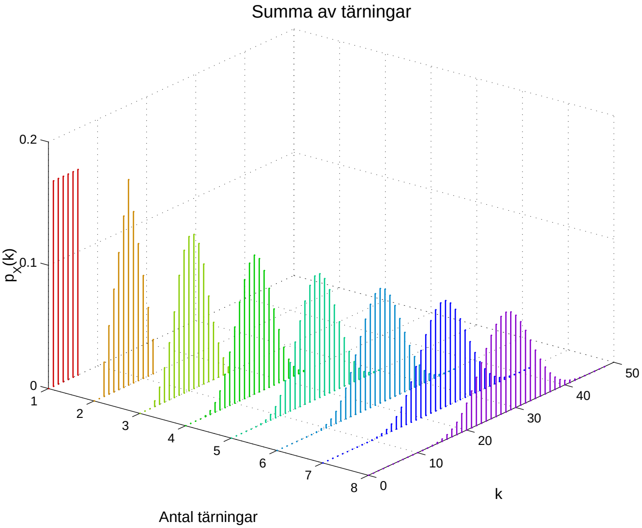
$$p_Z(k) = \sum_{i+j=k} p_X(i) \cdot p_Y(j) = \sum_{i=0}^{k} p_X(i) \cdot p_Y(k-i)$$

Kontinuerlig:

$$F_Z(z) = \iint_{x+y\leq z} f_X(x) \cdot f_Y(y)\, dxdy = \int_{-\infty}^{\infty} f_X(x) \cdot F_Y(z-x)\, dx$$

$$f_Z(z) = \int_{-\infty}^{\infty} f_X(x) \cdot f_Y(z-x)\, dx$$

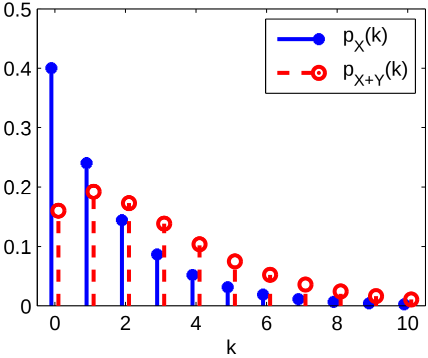
Summor av tärningskast



Exempel: Summa av diskreta stokastiska variabler

Vad blir sannolikhetsfunktionen för summan av två Geometriska stokastiska variabler X och Y?

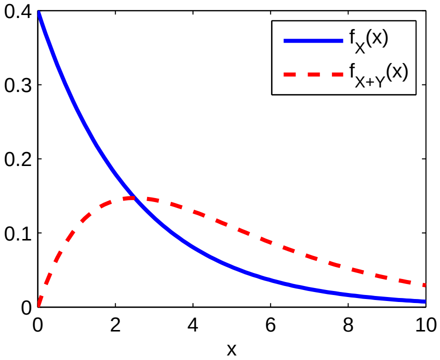
$$p_X(k) = p_Y(k) = p(1-p)^k,\ k = 0, 1, \ldots,$$



Exempel: Summa av kontinuerliga stokastiska variabler

Vad blir tätheten för $Z = X + Y$ om $X, Y \in Exp(\lambda)$, där X och Y är oberoende?

$$f_X(x) = f_Y(x) = \begin{cases} \lambda e^{-\lambda x} & x > 0 \\ 0 & \text{f.ö.} \end{cases}$$



Maximum

Störst av två oberoende $Z = \max(X, Y)$

$$\begin{aligned} F_Z(z) =& P(Z \leq z) = P(\max(X, Y) \leq z) = P(\{X \leq z\} \cap \{Y \leq z\}) \\ =& F_X(z) \cdot F_Y(z) \end{aligned}$$

Störst av fler oberoende $Z = \max(X_1, \ldots, X_n)$

$$F_Z(z) = F_{X_1}(z) \cdot \ldots \cdot F_{X_n}(z)$$

Minimum

Minst av två oberoende $Z = \min(X, Y)$

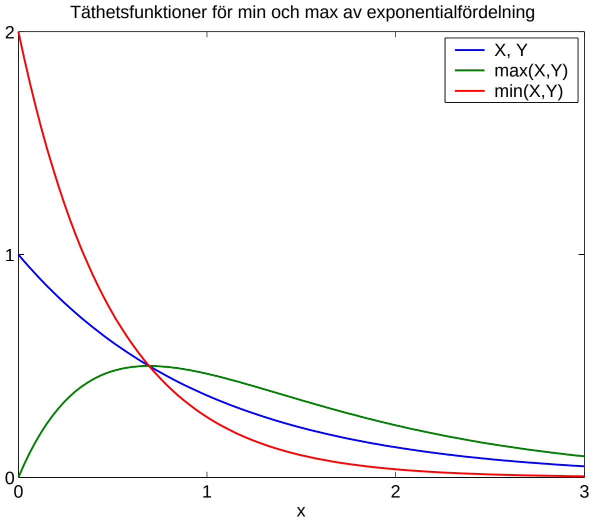
$$\begin{aligned} F_Z(z) =& P(Z \leq z) = P(\min(X, Y) \leq z) = 1 - P(\min(X, Y) > z) \\ =& 1 - P(\{X > z\} \cap \{Y > z\}) = 1 - [1 - F_X(z)] \cdot [1 - F_Y(z)] \end{aligned}$$

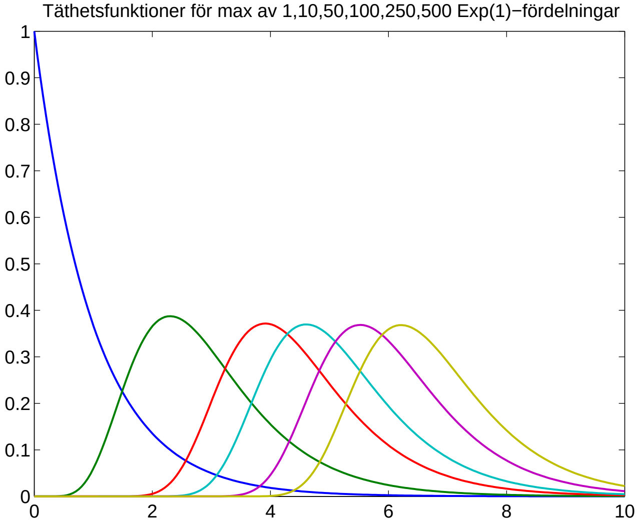
Minst av fler oberoende $Z = \min(X_1, \ldots, X_n)$

$$F_Z(z) = 1 - [1 - F_{X_1}(z)] \cdot \ldots \cdot [1 - F_{X_n}(z)]$$

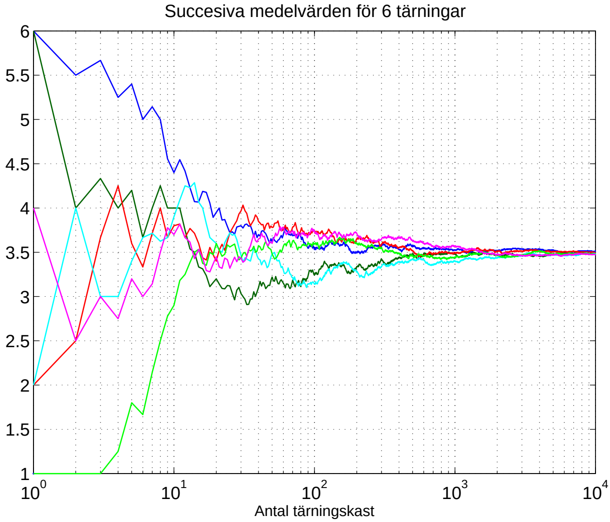
Exempel: Tid tills maskin går sönder

Vi har en komplicerad maskin som består av n stycken delsystem. Maskinen fungerar så länge varje delsystem fungerar. Antag att tiden till att delsystem k går sönder är T_k, där $T_k \in Exp(\lambda_k)$, för $k = 1, 2, \ldots, n$. Delsystemen går sönder oberoende av varandra. Vad är fördelningen för tiden tills maskinen går sönder?


Täthetsfunktioner för min och max av exponentialfördelning
X, Y
max(X,Y)
min(X,Y)
2
1
0
0
1
2
3
x


Täthetsfunktioner för max av 1,10,50,100,250,500 Exp(1)−fördelningar
1
0.9
0.8
0.7
0.6
0.5
0.4
0.3
0.2
0.1
0
0
2
4
6
8
10

Väntevärden



Väntevärde, $E(X), \mu, \mu_X, m, \ldots$

Väntevärdet anger **tyngdpunkten** för fördelningen och kan tolkas som det värde man får i ”**medeltal** i långa loppet”.

$$E(X) = \begin{cases} \int_{-\infty}^{\infty} x \cdot f_X(x)\,dx & \text{Kontinuerlig} \\ \sum_k k \cdot p_X(k) & \text{Diskret} \end{cases}$$

Väntevärde av $Y = g(X)$

$$E(Y) = \begin{cases} \int_{-\infty}^{\infty} g(x) \cdot f_X(x)\,dx & \text{Kontinuerlig} \\ \sum_k g(k) \cdot p_X(k) & \text{Diskret} \end{cases}$$

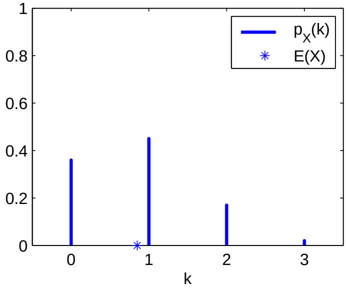
Exempel: Keno-3 (igen)

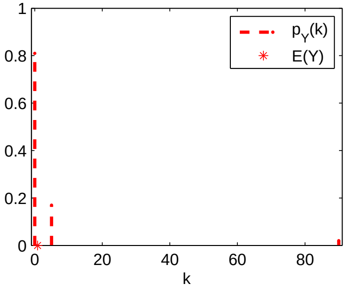
I Keno-3 väljs 3 av 70 nr. Vid dragning väljs 20 av dessa 70 ut som vinstnummer. Låt $X =$ Antal vinstnummer man prickar in och $Y =$ Vinsten (kr). Två vinstnr ger 5 kr och tre vinstnr ger 90 kr. Sannolikhetsfunktionerna är

j	0	1	2	3
$p_X(j)$	0.36	0.45	0.17	0.02

k	0	5	90
$p_Y(k)$	0.81	0.17	0.02

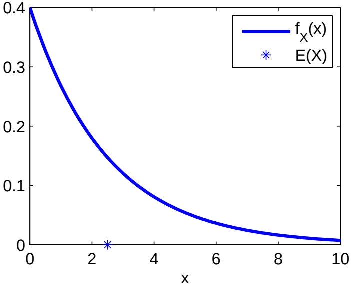
Vad är väntevärdet av antal vinstnr, X, resp. vinsten (kr), $Y = g(X)$?





Exempel

1. Vad blir väntevärdet $E(X)$ om $X \in Exp(\lambda)$?



2. Vad blir väntevärdet av $a + bX$ om $X \in Exp(\lambda)$?

Varians, $V(X)$, σ^2, σ_X^2

Variansen anger hur utspridd X är kring sitt väntevärde.

$$V(X) = E\left\{\left[X - E(X)\right]^2\right\} = E(X^2) - E(X)^2$$

Variansen är alltid positiv (eller noll).

Standardavvikelse, $D(X)$, σ, σ_X

$$D(X) = \sqrt{V(X)}$$

- Standardavvikelsen har samma dimension som X och $E(X)$.

Exempel

- Vad blir variansen $V(X)$ om $X \in Exp(\lambda)$?
- Vad blir standardavvikelsen $D(X)$ om $X \in Exp(\lambda)$?