Föreläsning 1, Matematisk statistik 7.5hp för E
Sannolikhet

Stas Volkov

All info finns på:

tinyurl.com/FMSF20-2018

Matematisk statistik – slumpens matematik

Sannolikhetsteori: Hur beskriver man slumpen?

Statistikteori: Vilka slutsatser kan man dra av ett datamaterial?

Slumpmässig Variation

- Inom population
- Mätosäkerhet

Vad kan vi veta om slumpmässig variation?

Inte exakt vad som ska hända, men hur ofta olika saker händer.

Vad vi kan säga är hur sannolika olika händelser är.

Tillämpningar för matematisk statistik

- Miljö
  - Ozonlagret bild
  - Våghöjd bild
- Ekonomi
  - Aktiedata bild
  - Försäkringar bild
- Signalbehandling
  - EEG/EKG bild
  - Hitta sprängämnen bild
  - Hitta narkotika bild

Tillämpningar för matematisk statistik (forts)

- Mobil kommunikation
- Elmarknad
- Försäkringar
- Spel/Lotterier
- Biologi
- Geologi
- osv

Praktiska detaljer

- **Kräver** 12 hp inom Endim och/eller Flerdim och/eller Linalg. Vi inväntar oktobertentorna innan vi kastar ut er från kursen.
- 2 föreläsningar i veckan
- 1 räkneövning i veckan
- 4 **obligatoriska** datorövningar (labbar)
- 1 **obligatoriskt** färdighetsprov deadline (se hemsida)
- **skriftlig tentamen:** se scheman.
- Kurshemsida: `tinyurl.com/FMSF20-Lund`
- Föreläsare: Stanislav Volkov, MH:316

Grundläggande sannolikhetsteori

Grundläggande begrepp

- *Utfall* – resultatet av ett slumpmässigt försök.
  Bet. $\omega_1, \omega_2, \dots$
- *Händelse* – en samling av ett eller flera utfall.
  Bet. $A, B, \dots$
- *Utfallsrum* – mängden av möjliga utfall. Bet Ω

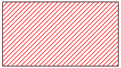
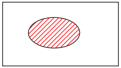
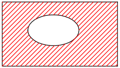
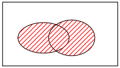
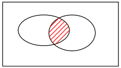
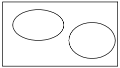
Exempel: Tärningskast

Ex. Kasta en tärning.

- Utfallsrum $\Omega = \{1\text{:a}, 2\text{:a}, 3\text{:a}, 4\text{:a}, 5\text{:a}, 6\text{:a}\}$
- En händelse A : "Minst 4:a" $= \{4\text{:a}, 5\text{:a}, 6\text{:a}\}$
- B : "Högst 5:a" $= \{1\text{:a}, 2\text{:a}, 3\text{:a}, 4\text{:a}, 5\text{:a}\}$
- C : "3:a" $= \{3\text{:a}\}$

Ex. Kasta två tärningar.
Ej uppenbart hur man skall välja utfallsrum. T.ex.

- $\Omega = \{(1, 1), (1, 2), \ldots, (6, 6)\}$. Totalt 36 utfall.
- Om man bara är intresserad av summan:
  $\Omega = \{2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12\}$. 11 utfall.

Händelser	**Wenn-diag.**	**Mängdlära**
Utfallsrummet Ω		Grundmängden
Händelsen A; A inträffar		Delmängden A
Komplementhändelsen. A^* till A; A inträffar ej		Komplementet $\complement A$ till A
Unionhändelsen $A \cup B$; A eller B eller båda inträffar		Unionen $A \cup B$
Snitthändelsen $A \cap B = AB$; både A och B inträffar		Snittet $A \cap B$
A och B *oförenliga* hndlser; kan ej inträffa samtidigt		A och B disjunkta

Exempel (kasta en tärning rep, forts)

- A : ”Minst 4:a” $= \{4\text{:a}, 5\text{:a}, 6\text{:a}\}$
- B : ”Högst 5:a” $= \{1\text{:a}, 2\text{:a}, 3\text{:a}, 4\text{:a}, 5\text{:a}\}$
- C : ”3:a” $= \{3\text{:a}\}$

Några exempel på snitt och union

- $A \cap B = \{4\text{:a}, 5\text{:a}\}$
- $A \cup B = \Omega$
- $B \cap C = C = \{3\text{:a}\}$
- $A \cap C = \{\} = \emptyset$. Kan inte inträffa, eftersom A och C är oförenliga.

Sannolikhet

Sannolikheten att en händelse A skall inträffa bet. $P(A)$
En sannolikhet måste uppfylla följande,
Kolmogorovs axiomsystem:

- $0 \le P(A) \le 1$ — En sannolikhet är ett tal mellan 0 och 1
- $P(\Omega) = 1$ — Sannolikheten att *något* skall hända är 1
- $P(A_1 \cup A_2 \cup A_3 \cup \dots)$
  $= P(A_1) + P(A_2) + P(A_3) + \dots$ — såvida $A_1, A_2, \dots$ är oförenliga

Därav följer att även t.ex.

Komplementsatsen $P(A^*) = 1 - P(A)$.

Om det är slh 1/100 att vinna på ett lotteri är slh 99/100 att *inte* vinna.

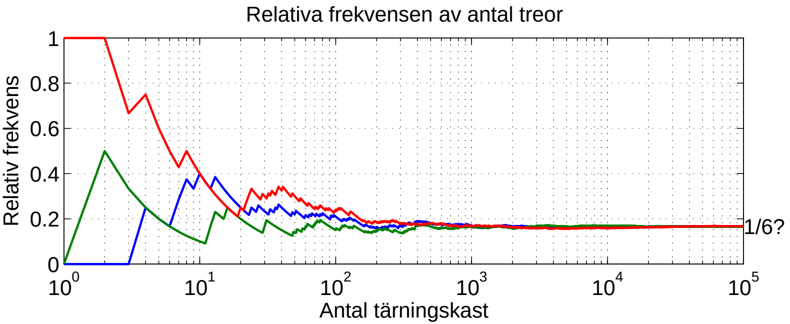
Additionssatsen $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$

Frekvenstolkning av sannolikhet

Upprepa ett slumpmässigt försök n gånger

$$\frac{\text{Antal ggr } A \text{ inträffar}}{n} \to P(A), \quad n \to \infty$$

Ex Kasta tre tärningar 100 000 ggr och räkna ut relativa frekvensen treor i varje kast för var och en av tärningarna



Den klassiska sannolikhetsdefinitionen

Om ett försök kan utfalla på m möjliga sätt som alla är lika sannolika (har vi en *likformig* sannolikhetsfördelning) och en händelse A inträffar vid g st av dessa gäller

$$P(A) = \frac{g}{m}$$

Ex Dra ett kort ur en kortlek. Vad är sannolikheten att det är ett hjärter?
Lsg Det finns $m = 52$ kort varav $g = 13$ är hjärter så
$P(\heartsuit) = 13/52 = 1/4$
Ex Dra två. Vad är sannolikheten att båda är hjärter?
Lsg Med lite kombinatorik blir det lite mer komplicerat

$$P(\text{båda } \heartsuit) = \frac{\text{Antal sätt att välja två } \heartsuit}{\text{Antal sätt att välja två kort}} = \frac{\binom{13}{2}}{\binom{52}{2}} = \frac{78}{1326} = \frac{1}{17}$$

Betingad sannolikhet

Ex. För en tärning har vi $P(\text{Etta}) = 1/6$, men om vi vet att utfallet är udda får vi $P(\text{Etta om udda utfall}) = 1/3$.
Def. Den betingade sannolikheten att A skall inträffa om vi vet att B inträffat betecknas $P(A \mid B)$ och definieras som

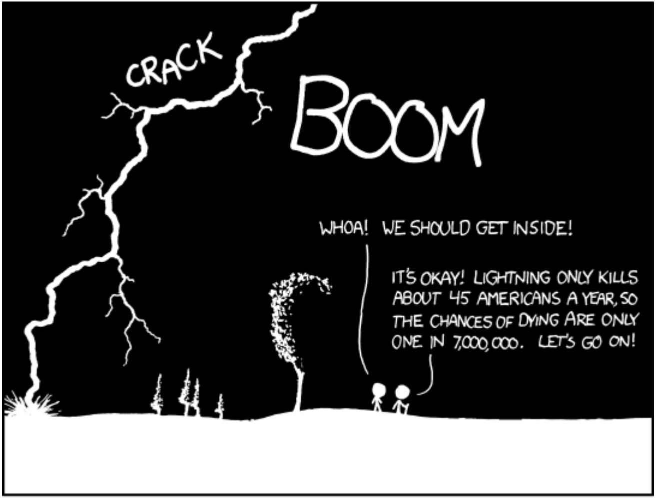
$$P(A \mid B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)}$$

Ur detta (och $P(B \mid A)$) får vi två räkneregler för $P(A \cap B)$

$$P(A \cap B) = P(A \mid B) \cdot P(B) = P(B \mid A) \cdot P(A)$$

Ex (igen) Dra två kort.
Vad är sannolikheten att båda är hjärter?

Betingad risk



THE ANNUAL DEATH RATE AMONG PEOPLE WHO KNOW THAT STATISTIC IS ONE IN SIX.

Satsen om total sannolikhet

Om vi har n st händelser $H_1, \ldots, H_n$ som är

- Parvis oförenliga, dvs $H_i \cap H_j = \emptyset, \ i \neq j$
- Tillsammans täcker utfallsrummet, dvs $\bigcup_{i=1}^{n} H_i = \Omega$

gäller för varje händelse A

$$P(A) = \sum_{i=1}^{n} P(A \mid H_i) \cdot P(H_i)$$

samt *"Konsten att vända en betingad sannolikhet"* eller **Bayes sats**

$$P(H_i \mid A) = \frac{P(H_i \cap A)}{P(A)} = \frac{P(A \mid H_i) \cdot P(H_i)}{P(A)}$$

Oberoende händelser

Om det visar sig att $P(A \mid B) = P(A)$, påverkas inte A av att B inträffat eller ej, de är oberoende. Detta kan med definitionen av betingad sannolikhet skrivas om som $P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B)$.

Def. Händelserna A och B är *oberoende* av varandra

$$\iff$$

$$P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B)$$

Obs. Skilj mellan *oberoende* och *oförenliga*.

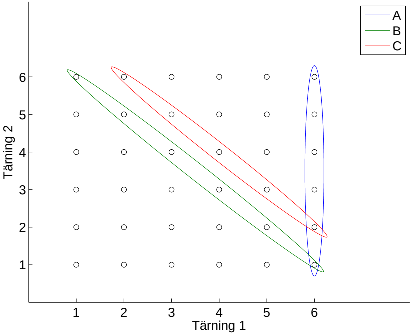
Kan två oberoende händelser vara oförenliga?

Exempel: Oberoende

Kasta två tärningar och låt

$$A = \text{Första tärningen visar sexa}$$
$$B = \text{Summan är sju}$$
$$C = \text{Summan är åtta}$$

Vilka av händelserna A, B och C är oberoende av varandra?



Alla, ingen och någon

Om vi har n st *oberoende* händelser $A_1, \ldots, A_n$ (definitionen!) kan vi räkna ut sannolikheten att

- alla inträffar

$$P(A_1 \cap \cdots \cap A_n) = P(A_1) \cdot \ldots \cdot P(A_n)$$

- ingen inträffar, dvs alla inträffar inte

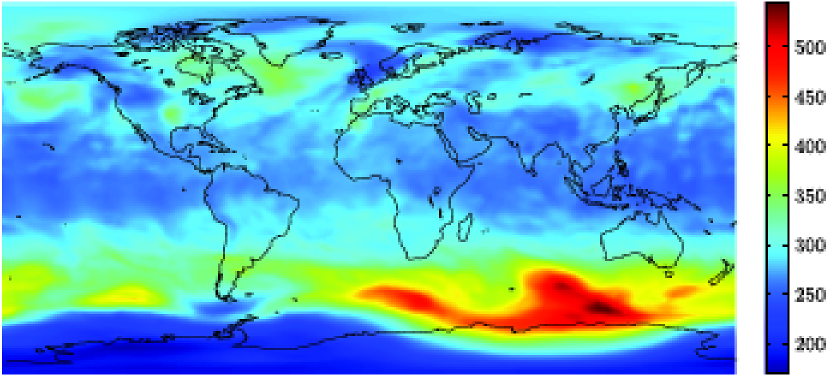
$$\begin{aligned} P(A_1^* \cap \cdots \cap A_n^*) &= P(A_1^*) \cdot \ldots \cdot P(A_n^*) = \\ &= [1 - P(A_1)] \cdot \ldots \cdot [1 - P(A_n)] \end{aligned}$$

- någon inträffar, dvs minst en, eller ”inte ingen”

$$\begin{aligned} P(A_1 \cup \cdots \cup A_n) &= 1 - P(A_1^* \cap \cdots \cap A_n^*) = \\ &= 1 - [1 - P(A_1)] \cdot \ldots \cdot [1 - P(A_n)] \end{aligned}$$

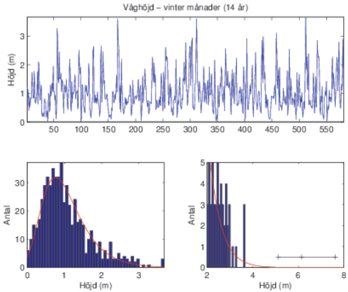
Ozon i Dobson enheter

Tillbaka



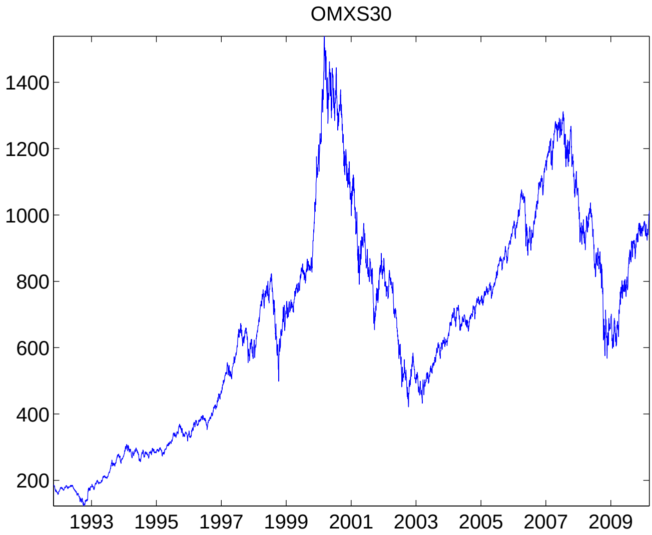
Våghöjd

▸ Tillbaka



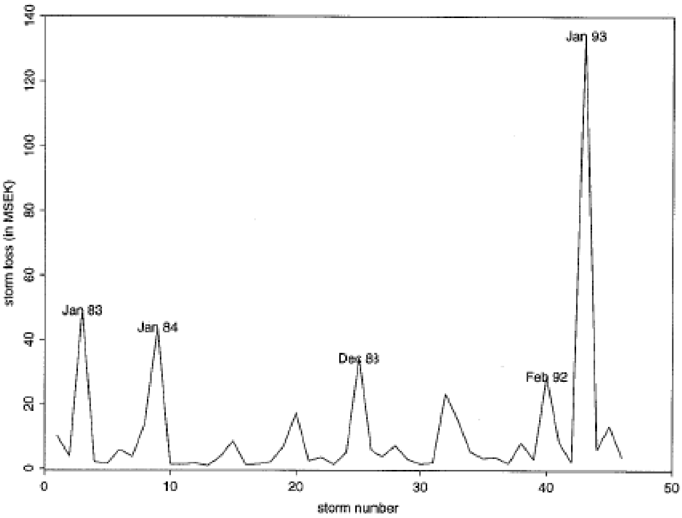
OMXS30 aktieindex

Tillbaka



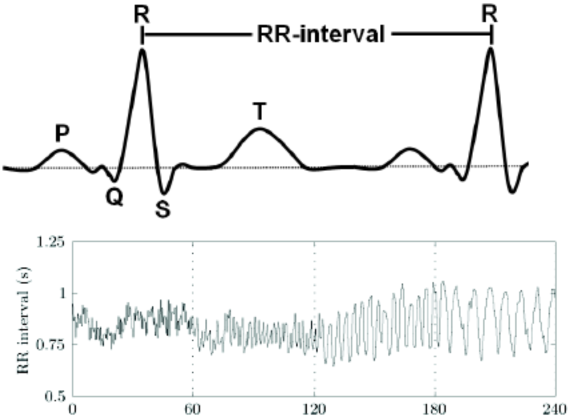
Kostnad stormskador

▸ Tillbaka



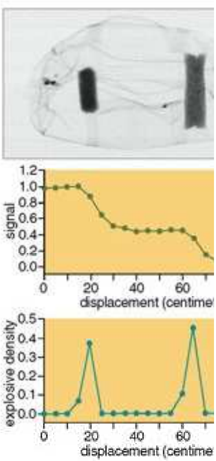
EKG och R-R variation

▸ Tillbaka



Detektion av sprängämne

▸ Tillbaka



NQR signal meta-amfetamin

▸ Tillbaka