GAUSS'S APPROXIMATIONSFORMLER
MATEMATISK STATISTIK AK FÖR CDE, FMS 012
JOAKIM LÜBECK, MARS 2007

1 Gauß's approximationsformler

Väntevärde och varians eller standardavvikelse är de viktigaste läges- och spridningsmåtten. Eftersom variansen är ett mått på osäkerheten är det intressant att kunna göra sig en uppfattning om dess storlek då man har en funktion av en eller flera variabler och man känner de ingående variablernas varians.

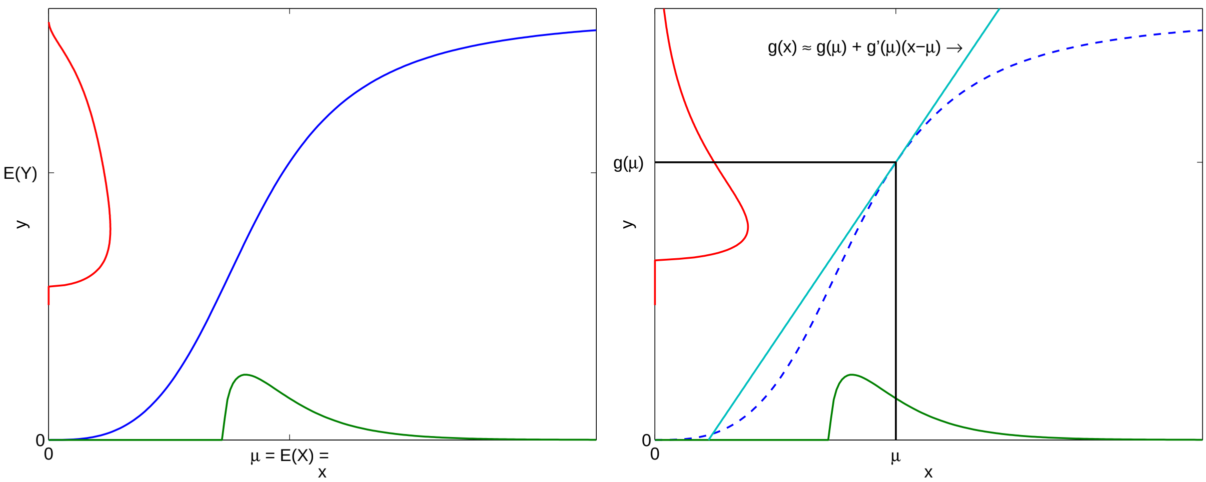
1.1 En variabel

För en kontinuerlig stokastisk variabel X gäller för en funktion, $g(X)$, av denna att

$$E(g(X)) = \int_{-\infty}^{\infty} g(x) f_X(x)\, dx$$

men denna integral är inte alltid lösbar; $f_X(x)$ kanske inte ens är känd. Men känner man väntevärde och varians för X kan man få approximativa värden på $E(g(X))$ och $V(g(X))$ genom att approximera $g(X)$ med en linjär funktion.

Första ordningens taylorutveckling av $g(X)$ kring punkten $\mu = E(X)$ kan skrivas



Figur 1.1: I vänstra figuren ses hur täthetsfunktionen för X (–) transformeras till täthetsfunktionen för Y (–) på y-axeln genom $Y = g(X)$ (–). I högra figuren transformeras Y istället genom den räta linje som tangerar g i punkten $(\mu, g(\mu))$. Y's approximativa väntevärde $E(Y) \approx g(\mu)$ är markerat.

$$g(X) \approx g(\mu) + (X - \mu) g'(\mu),$$

dvs den räta linje som tangerar $g(X)$ i punkten μ. För väntevärde och varians för en linjär funktion har vi färdiga räkneregler ($E(aX + b) = aE(X) + b$ och $V(aX + b) = a^2 V(X)$) så vi får här (μ, $g(\mu)$ och $g'(\mu)$ är tal)

$$\begin{aligned}
E(g(X)) &\approx E[g(\mu) + (X-\mu)g'(\mu)] = g(\mu) + g'(\mu)E(X) - g'(\mu)\mu = [E(X) = \mu] = g(\mu) \\
V(g(X)) &\approx V[g(\mu) + (X-\mu)g'(\mu)] = V(g'(\mu)X) = [g'(\mu)]^2 V(X).
\end{aligned}$$

dvs

$$E(g(X)) \approx g(E(X))$$
$$V(g(X)) \approx [g'(E(X))]^2 V(X).$$

Om approximationen skall stämma bra bör naturligtvis funktionen g vara hyfsat linjär i en omgivning kring μ, säg μ plus minus ett par standardavvikelser för X. Dessutom bör g inte ha något extremvärde i denna omgivning, om $g'(\mu)$ är noll blir ju approximationen av $V(g(X))$ noll och är vi i närheten av denna punkt blir nog approximationen för liten. I figur 1.1 visas hur X's fördelning transformeras av g och första ordningens taylorutveckling av den samma. I just det fallet är funktionen g inte speciellt linjär i det område där X har sin fördelning.

Exempel 1.1. Låt $E(X) = \mu$ och $V(X) = \sigma^2$.
(a) Bestäm approximativt väntevärde och varians för $Y = g(X) = \pi X^2$.

$$E(Y) \approx g(E(X)) = \pi\mu^2$$
$$V(Y) \approx [g'(E(X))]^2 V(X) = [g'(X) = 2\pi X] = (2\pi\mu)^2\sigma^2$$

(b) Bestäm väntevärdet för Y utan approximation.
Eftersom $V(X) = E(X^2) - E(X)^2$ fås $E(X^2) = V(X) + E(X)^2$ och det sökta väntevärdet blir

$$E(Y) = E(\pi X^2) = \pi E(X^2) = \pi(V(X) + E(X)^2) = \pi\sigma^2 + \pi\mu^2$$

Vi ser att approximationen av väntevärdet alltid är för liten men att felet blir litet om σ är liten i förhållande till μ.

□

1.2 Flera variabler

För en funktion av två variabler, $g(X, Y)$, blir första ordningens taylorutveckling kring punkten $(\mu_X, \mu_Y) = (E(X), E(Y))$ det plan som tangerar g i denna punkt

$$g(X, Y) \approx g(\mu_X, \mu_Y) + (X - \mu_X)g'_X(\mu_X, \mu_Y) + (Y - \mu_Y)g'_Y(\mu_X, \mu_Y)$$

där $g'_X = \frac{\partial g}{\partial X}$ och motsvarande för Y. För en linjär funktion av två variabler har vi att $E(aX + bY + c) = aE(X) + bE(Y) + c$ och $V(aX + bY + c) = a^2V(X) + b^2V(Y) + 2abC(X, Y)$, så i det här fallet fås

$$\begin{aligned}
E(g(X, Y)) &\approx E[g(\mu_X, \mu_Y) + (X - \mu_X)g'_X(\mu_X, \mu_Y) + (Y - \mu_Y)g'_Y(\mu_X, \mu_Y)] = \\
&= g(\mu_X, \mu_Y) + (E(X) - \mu_X)g'_X(\mu_X, \mu_Y) + (E(Y) - \mu_Y)g'_Y(\mu_X, \mu_Y) = g(\mu_X, \mu_Y) \\
V(g(X, Y)) &\approx V[g(\mu_X, \mu_Y) + (X - \mu_X)g'_X(\mu_X, \mu_Y) + (Y - \mu_Y)g'_Y(\mu_X, \mu_Y)] = \\
&= [g'_X(\mu_X, \mu_Y)]^2 V(X) + [g'_Y(\mu_X, \mu_Y)]^2 V(Y) + 2g'_X(\mu_X, \mu_Y)g'_Y(\mu_X, \mu_Y)C(X, Y).
\end{aligned}$$

Detta kan generaliseras till en funktion av n st. variabler $X_1, \ldots, X_n$

$$E(g(X_1, \ldots, X_n)) \approx g(E(X_1), \ldots, E(X_n)).$$
$$V(g(X_1, \ldots, X_n)) \approx \sum_{i=1}^{n} c_i^2\, V(X_i) + 2\sum_{i<j} c_i\, c_j\, C(X_i,\, X_j),$$
$$\text{där } c_i = \frac{\partial g}{\partial X_i}(E(X_1), \ldots, E(X_n))$$

Exempel 1.2. Bestäm approximativa värden på variansen för $X \cdot Y$ och X/Y om X och Y är oberoende av varandra. Uttryck svaren i μ_X, μ_Y, $V(X)$ och $V(Y)$.

1. $g(X,Y) = X \cdot Y$. $g'_X(X,Y) = Y$ och $g'_Y(X,Y) = X$.

$$\begin{aligned} V(X \cdot Y) &\approx [g'_X(\mu_X,\mu_Y)]^2 V(X) + [g'_Y(\mu_X,\mu_Y)]^2 V(Y) = \\ &= \mu_Y^2 V(X) + \mu_X^2 V(Y) \end{aligned}$$

2. $g(X,Y) = \frac{X}{Y}$. $g'_X(X,Y) = \frac{1}{Y}$ och $g'_Y(X,Y) = -\frac{X}{Y^2}$.

$$V(\frac{X}{Y}) \approx \frac{1}{\mu_Y^2} V(X) + \frac{\mu_X^2}{\mu_Y^4} V(Y)$$

□

Exempel 1.3.

□

1.3 Andra ordningens approximation*

Vill man basera sin approximation på en andra ordningens taylorutveckling av g, som för en variabel blir

$$g(X) \approx g(\mu) + (X-\mu)g'(\mu) + \frac{1}{2}(X-\mu)^2 g''(\mu),$$

begränsar vi oss här till väntevärdet eftersom variansapproximationen blir ganska bökig och kommer att innehålla termer av $E(X^3)$ och $E(X^4)$ vilket man sällan har information om vid tillämpning av Gauß-approximation.

$$E(g(X)) \approx g(\mu) + E(X-\mu)g'(\mu) + \frac{1}{2}E[(X-\mu)^2]g''(\mu) = g(\mu) + \frac{1}{2}V(X)g''(\mu).$$

För en funktion av *n oberoende* variabler kan man visa att

$$E(g(X_1,\ldots,X_n)) \approx g(E(X_1),\ldots,E(X_n)) + \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n} d_i^2\, V(X_i),$$

$$\text{där } d_i = \frac{\partial^2 g}{\partial X_i^2}(E(X_1),\ldots,E(X_n))$$

Är de inte oberoende tillkommer kovarianstermer och korsderivator.