



## Problem, Del 2

### 1. Ett annorlunda utropstecken!!

Om  $n$  är ett positivt heltal betecknar vi med  $n!$  produkten  $1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \dots \cdot n$ . Visa att följande gäller:

$$\frac{1}{2!} + \frac{2}{3!} + \frac{3}{4!} + \dots + \frac{2009}{2010!} = \frac{2010! - 1}{2010!}. \quad (20p)$$

### 2. Robotar

I en robotsfabrik tillverkas det robotar av 4 olika färger (röda, gröna, blåa, gula). En robot kan ha mellan 2 och 4 armar och mellan 4 och 21 knappar. Hur många olika sorters robotar tillverkas i fabriken? Hur många robotar måste det minst finnas robotfabrikens lager för att man ska kunna vara säker på att det finns 21 identiska robotar i lagret? (20p)

### 3. X, Y, Z och A, B, C

Talen  $x, y, z$  och  $a, b, c$  uppfyller att

$$x + y + z = a + b + c, \text{ samt } x + a = y + b = z + c$$

Visa att i så fall är

$$x^2 + y^2 + z^2 = a^2 + b^2 + c^2.$$

Om man dessutom vet att

$$x^2 + a^2 = y^2 + b^2 = z^2 + c^2$$

visa att

$$x^3 + y^3 + z^3 = a^3 + b^3 + c^3.$$

Det kan vara av hjälp att visa att  $x^3 - a^3 = (x - a)(x^2 + ax + a^2)$ ! (30p)

### 4. Färgglada kameleonter

På en fjärran ö lever 12 väldigt artiga kameleonter av en särskild art. Kameleonternas färg kan skifta mellan rött, blått och grönaste grönt. Men ingen kameleont skiftar färg i onödan, utan endast om den råkar träffa en annan kameleont som i mötets ögonblick råkar ha en annan färg. Av ren artighet skiftar alltså två mötande kameleonter av olika färger alltid färg till den tredje färgen.

En forskare vars sysselsättning är att kartlägga kameleonternas vanor, observerar vid en viss tidpunkt att 3 av kameleonterna är röda, 4 blåa och resten gröna och kan inte låta bli att ställa sig följande frågor:

- (1) Är det möjligt att ingen av kameleonerna är grön vid ett senare tillfälle?
- (2) Kan det bli 4 möten mellan blåa och röda kameleonten, 3 möten mellan blåa och gröna och fem möten mellan röda och gröna och hur skulle i så fall kameleonernas färgfördelning vara efteråt?
- (3) Är det möjligt att alla kameleonerna är gröna vid ett senare tillfälle?

Hjälp forskaren besvara frågorna och motivera dina svar! (30p)