Inledande kombinatorik

LCB 2001

Ersätter Grimaldi 1.1–1.4, 3.1 (delvis)

1 Additions- och multiplikationsprinciperna

Kombinatorik handlar om konsten att räkna antalet av saker och ting. Hur många gånger genomlöpes en viss slinga i ett program? Hur många alternativ står till buds för att utföra en viss operation? Hur många kodord är möjliga vid en viss konstruktion av en kod? Hur många gånger uppträder mönstret 0010 i en viss lång sekvens av 0 och 1. Inom diskret sannolikhetslära finns många kombinatoriska problem.

Läsaren bör ha tillämpningar av detta slag i minnet i fortsättningen. De flesta exempel kommer nämligen att handla om betydligt mer vardagliga och skenbart ganska meningslösa problem (val av färgade eller numrerade kulor, arrangemang av bokstäver, ...). Sådana problem är enkla att formulera och förstå, och är därför lämpliga då det gäller att tydliggöra de förekommande principerna.

Ibland kan man få intryck av att det mest gäller att vara listig då man ska lösa kombinatoriska problem. Det finns emellertid systematiska metoder som kan ersätta en stor del av listigheten. De mest elementära av dessa diskuteras i detta kapitel, medan mer avancerade metoder kommer senare.

Vi börjar med de s.k. *additions*- och *multiplikationsprinciperna*.

1.1 Additionsprincipen

Antag att vi har möjlighet att välja mellan två ”objekt” A och B, där A förekommer i n varianter och B i m varianter. Om vi ska välja en av A och B, hur många varianter har vi då att välja mellan?

Svaret är naturligtvis självklart:

> *Antalet sätt att välja mellan n varianter av A och m varianter av B är $n+m$.*

Det är detta som kallas *additionsprincipen*. Den kan direkt generaliseras till fler än två objekt $A, B, C, \ldots$.

I tillämpningarna används additionsprincipen ofta för att ”dela upp i fall”; till exempel kan man var för sig studera effekterna av olika utfall av ett visst experiment. Exempel kommer strax (exempel **??** och **??** nedan).

1.2 Multiplikationsprincipen

Vi vill nu välja *först* en av varianterna av A och *därefter* en av varianterna av B. Hur många alternativ har vi då totalt? Svaret ges av *multiplikationsprincipen*:

> *Antalet sätt att välja först en av n varianter av A och därefter en av m varianter av B är nm.*

Även här kan man naturligt generalisera till fler än två objekt.

Exempel 1. Låt M beteckna en mängd med 10 element. Hur många delmängder finns det till M ?

Lösning: En delmängd M' till M kan bildas genom att man går igenom alla element i M, ett i taget, och beslutar huruvida det skall ingå i M' eller ej. För varje element i M har man alltså 2 alternativ (tillhör/tillhör inte), och ett val ska göras för vart och ett av de 10 elementen. Det totala antalet möjligheter blir

$$2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot \ldots \cdot 2 = 2^{10}.$$

Antalet delmängder till M är alltså 2^{10}.

I det allmänna fallet då mängden har n element finns det naturligtvis 2^n möjligheter. □

Exempel 2. Additions- och multiplikationsprinciperna kan ofta kombineras. I en enkel implementation av programspråket BASIC på 1970-talet utgjordes en identifierare av en bokstav (A–Z, 26 st.) eller en bokstav följd av en siffra (10 st.). Hur många identifierare fanns det totalt?

Lösning: För att lösa uppgiften delar vi upp i fall. Betrakta först identifierare som bara utgöres av en bokstav. Sådana finns det tydligen 26 stycken. Betrakta sedan de identifierare som består av en bokstav följd av en siffra. Enligt multiplikationsprincipen finns det $26 \cdot 10$ sådana. Av additionsprincipen följer att det totala antalet identifierare är

$$26 + 26 \cdot 10 = 286.$$

□

Exempel 3. Hur många räkneoperationer (addition och multiplikation) måste utföras när man på normalt sätt multiplicerar två $n \times n$-matriser?

Lösning: De n^2 elementen i produktmatrisen beräknas var för sig, så vi kan betrakta ett element i taget och sedan addera resultaten. Av symmetriskäl innebär det att räkna på ett fall och sedan multiplicera med n^2.

Beräkning av ett element i matrisprodukten går ut på att ta skalärprodukten mellan en rad i den första faktorn och en kolonn i den andra:

$$\begin{pmatrix} \cdots & \cdots & & \cdots \\ & & & \\ a_1 & a_2 & \cdots & a_n \\ & & & \\ \cdots & \cdots & & \cdots \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \vdots & b_1 & \vdots \\ \vdots & b_2 & \vdots \\ & \vdots & \\ \vdots & b_n & \vdots \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} & \cdots & \\ & & \\ \vdots & a_1 b_1 + \ldots + a_n b_n & \vdots \\ & & \\ & \cdots & \end{pmatrix}.$$

Här krävs tydligen att man först utför n multiplikationer $a_i b_i$. Därefter skall resultaten adderas. Man adderar två tal i taget, och totalt krävs därför $n-1$ additioner. Sammanlagt kräver varje matriselement $n + (n-1) = 2n - 1$ räkneoperationer.

Totalt kräver multiplikationen av två matriser således

$$n^2(2n-1) = 2n^3 - n^2$$

räkneoperationer. □

Anmärkning. Resultatet innebär att antalet räkneoperationer dividerat med n^3 är en begränsad funktion av n för n stort; detta brukar uttryckas så att antalet operationer är $O(n^3)$ för stora n.

Det finns faktiskt numeriskt effektivare sätt att multiplicera matriser än det ovan beskrivna. Ett berömt resultat av Strassen (1968) säger att det är möjligt att multiplicera två $n \times n$-matriser med användning av endast $O(n^{{}^2\log 7})$ räkneoperationer (${}^2\log 7 \approx 2.81$).

Fler exempel kommer längre fram.

Vi ska i fortsättningen studera olika varianter att från n stycken *olika* objekt (till exempel kulor med olika märkning) välja ut r stycken. Sådana urval kan ske på olika sätt, och i tillämpningarna är det viktigt att man gör klart för sig på vilket sätt det sker. Ibland är *upprepning* tillåten, dvs. samma kula kan väljas mer än en gång. Så är fallet om man tillämpar återläggning: resultatet av ett val noteras, varefter den valda kulan läggs tillbaka och kan väljas igen. Samma situation uppstår om man har tillgång till ett obegränsat antal av varje objekt.

Man måste också göra klart för sig om hänsyn ska tas till den *ordning* i vilken kulorna väljes, eller om det bara är slutresultatet som räknas.

En tillämpning av multiplikationsprincipen visar att vi har $2 \cdot 2 = 4$ olika urvalssituationer att studera. Vi behandlar dem var för sig nedan.

2 Urval med hänsyn till ordning. Permutationer

2.1 Upprepning tillåten

Vi vill välja ut r objekt från n stycken olika, och vi tillåter upprepning, dvs. varje objekt kan väljas mer än en gång. Vid vart och ett av de r valen har vi tydligen n alternativ. Detta är precis situationen i multiplikationsprincipen; totalt finns det

$$n \cdot n \cdot \ldots \cdot n = n^r$$

olika utfall (se exempel **??**).

2.2 Ingen upprepning

När upprepning inte tillåts minskar antalet alternativ efter hand som urvalet fortskrider. För det totala antalet utfall ger nu multiplikationsprincipen svaret

$$n \cdot (n-1) \cdot (n-2) \cdot \ldots \cdot (n-r+1). \tag{1}$$

För att kunna fortsätta diskussionen behöver vi lite terminologi och beteckningar.

DEFINITION 1. *Varje uppställning av ett antal olika objekt i någon ordning kallas en* ***permutation*** *av dessa.*

Om inte alla objekten är olika talar vi i stället om ett *arrangemang* av dem. Viktigt är att hänsyn tas till den ordning i vilken objekten ställs upp.

En permutation kan tydligen konstrueras genom att successivt välja ut objekten som ska stå på plats 1, på plats 2, på plats 3, osv. Antalet permutationer av n objekt får vi genom att välja $r = n$ i (**??**), och är lika med

$$n \cdot (n-1) \cdot (n-2) \cdot \ldots \cdot 2 \cdot 1.$$

För detta tal inför vi beteckningen

$$n!\,,$$

vilken utläses *n-fakultet*. Definitionsmässigt är alltså $n!$ produkten av alla positiva heltal från n och nedåt. Till exempel är $4! = 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 24$.

För att vissa formler längre fram ska ge rätt resultat även i en del undantagsfall är det bekvämt att också definiera $0! = 1$.

Formeln (**??**) ovan för antalet sätt att välja r objekt från n med hänsyn till ordningen kan skrivas med fakultetsbeteckningar:

$$n \cdot (n-1) \cdot (n-2) \cdot \ldots \cdot (n-r+1) = \frac{n \cdot (n-1) \cdot \ldots \cdot (n-r+1) \cdot (n-r)!}{(n-r)!} = \frac{n!}{(n-r)!}.$$

Ibland användes symbolen $P(n,r)$ för detta tal. Läsaren kan själv verifiera att $P(n,n) = n!$, som sig bör.

Vi sammanfattar:

Antalet permutationer av r objekt utvalda bland n olika är

$$P(n,r) = \frac{n!}{(n-r)!}.$$

Exempel 4.

a) Antalet permutationer av de 7 bokstäverna i *BLÅGRÖN* är 7! .

b) Antalet permutationer av 4 bokstäver utvalda bland dessa 7 är

$$\frac{7!}{(7-4)!} = \frac{7\cdot 6\cdot 5\cdot 4\cdot 3\cdot 2\cdot 1}{3\cdot 2\cdot 1} = 7\cdot 6\cdot 5\cdot 4 = 840.$$

c) Om vi tillåter upprepning vid urvalet är det inte längre fråga om permutationer. Hur långa sviter som helst kan då förekomma, exempelvis $BBBB\dots B$. Till exempel är antalet sviter av längd 14 lika med

$$7\cdot 7\cdot\ \dots\ \cdot 7 = 7^{14}.$$

□

Anmärkning. Det är inte meningen att man ska lära sig formlerna ovan utantill. Vid varje tillfälle återför man sig i stället direkt på multiplikationsprincipen, så som härledningen av formlerna gick till. Till exempel får man i b) direkt resultatet $7\cdot 6\cdot 5\cdot 4 = 840$.

Vi ska nu se på några exempel där *viss* upprepning förekommer.

Exempel 5. Betrakta alla möjliga arrangemang av de fyra bokstäverna i $BALL$. Här har vi tillgång till de tre bokstäverna B, A och L, med kravet att L skall förekomma *två* gånger. Om vi förser dessa L med olika index, L_1 och L_2, så har vi den tidigare situationen med permutationer av fyra symboler. Antalet sådana är $4! = 24$. (Övning: Skriv upp dem.[1])

Tar vi nu bort indexen kommer varje arrangemang att uppträda två gånger; till exempel leder både L_1ABL_2 och L_2ABL_1 till $LABL$. Antalet olika arrangemang är således

$$\frac{4!}{2} = 12.$$

Lägg märke till att vad som egentligen står i nämnaren här är 2!, antalet permutationer av två symboler L_1 och L_2. Antalet arrangemang av de fem symbolerna i $BALLL$ är lika med $\frac{5!}{3!}$ $(= 20)$. □

Exempel 6.

a) Vi studerar samma problem som i exempel **??** för bokstäverna i *MASSASAUGA*. Antalet bokstäver är 10, och hade de varit olika skulle det funnits 10! permutationer av dem. Nu finns emellertid 4 stycken A. Dessa kan permuteras inbördes på 4! sätt, vilka alla ger

[1] Listan finns i Grimaldi, i 4:e upplagan på sidan 8.

upphov till samma arrangemang. Vi måste alltså dividera med 4!. Vidare finns det tre stycken S, vilka på samma sätt ger upphov till en faktor 3! i nämnaren. Antalet arrangemang är alltså

$$\frac{10!}{4!\,3!}. \tag{2}$$

b) Vi ställer nu frågan: hur många arrangemang av bokstäverna ovan finns det i vilka alla A står intill varandra?

För att lösa detta problem behandlar vi alla A som *en* enhet; vi limmar ihop bokstäverna till *en* symbol AAA. De symboler vi har att arrangera är alltså

$$M \quad S \quad S \quad S \quad U \quad G \quad AAA.$$

Antalet symboler är 7, varav 3 stycken S är lika. Med samma slags resonemang som ovan finner vi att antalet arrangemang är

$$\frac{7!}{3!}.$$

Ett alternativt sätt att tänka är att studera arrangemang av de sju symbolerna $M\ S\ S\ S\ U\ G\ A$. I varje sådant sätter man in de två återstående A:na intill det befintliga. □

Anmärkning. För tydlighets skull skriver man ibland resultatet i (**??**) på formen

$$\frac{10!}{4!\,3!\,1!\,1!\,1!},$$

med en faktor 1! i nämnaren för var och en av symbolerna M, G och U, vilka förekommer precis en gång. Ett uttryck av detta slag har den allmänna formen

$$\frac{n!}{n_1!\,n_2!\,\ldots\,n_r!}, \qquad \text{där } n_1+n_2+\ldots+n_r=n,$$

och $n_i \geq 0$ för alla i. Detta kallas en *multinomialkoefficient*. Vi kommer att diskutera sådana mer senare.

Exempel 7. Visa att

$$\frac{(2n)!}{2^n}$$

är ett heltal.

Lösning: Vi ska ge ett så kallat *kombinatoriskt* bevis, alltså ett bevis där man räknar något. I detta fall räknar vi antalet arrangemang av de $2n$ symbolerna

$$A_1 \quad A_1 \quad A_2 \quad A_2 \quad \ldots \quad A_n \quad A_n,$$

vilka är parvis lika. Med resonemang som tidigare är antalet arrangemang lika med $(2n)!$ dividerat med n stycken faktorer 2!, alltså

$$\frac{(2n)!}{2^n}.$$

Eftersom detta tal är svaret på en fråga ”hur många” måste det vara ett heltal. □

För fler exempel se Grimaldi.

3 Urval utan hänsyn till ordning och utan upprepning. Kombinationer

DEFINITION 2. *En **kombination** av r objekt utvalda från n (olika) är ett urval där ingen hänsyn tas till ordningsföljden, och där upprepning inte är tillåten.*

Man kan uppfatta det så att i en kombination väljes alla r objekten samtidigt, och inte ett och ett.

Antag att antalet kombinationer av r objekt valda från n stycken är x. Om vi efter att ha valt ut en kombination sorterar dess element i en bestämd ordning har vi fått en permutation av de r objekten. Eftersom antalet permutationer av r objekt är $r!$ följer av multiplikationsprincipen att antalet permutatationer av r objekt från n är $x \cdot r!$. Men vi har ju redan ett annat uttryck för detta antal i $P(n,r)$ ovan. Således får vi

$$x \cdot r! = \frac{n!}{(n-r)!} \qquad \Longleftrightarrow \qquad x = \frac{n!}{(n-r)!\,r!}.$$

Detta tal kallar vi en *binomialkoefficient*, och betecknar det $\binom{n}{r}$. Begreppet är så viktigt att vi gör en formell definition.

DEFINITION 3. *Med **binomialkoefficienten** $\binom{n}{r}$ menas talet*

$$\binom{n}{r} = \frac{n!}{(n-r)!\,r!}.$$

Definitionen fungerar även då $r = n$ och $r = 0$:

$$\binom{n}{n} = 1, \qquad \binom{n}{0} = 1.$$

Då $r < 0$ och då $r > n$ tolkar vi $\binom{n}{r}$ som 0. På så sätt kommer vissa formler för binomialkoefficienter som vi skall studera senare att fungera även i sådana fall.

Vårt kombinatoriska resultat ovan kan nu formuleras:

> *Antalet sätt att välja ut r objekt från n utan hänsyn till ordning och utan repetition är*
> $$\binom{n}{r}.$$

Exempel 8. Vi har att

$$\binom{n}{1} = \frac{n!}{(n-1)!\,1!} = \frac{n \cdot (n-1)!}{(n-1)!} = n.$$

Detta stämmer med den kombinatoriska tolkningen; antalet sätt att välja 1 objekt från n är ju precis n.

På motsvarande sätt (eller av symmetriskäl, se sats **??** nedan) är $\binom{n}{n-1} = n$. □

Exempel 9.

a) En student skall vid en tentamen besvara 7 av 10 frågor. På hur många sätt kan hon välja ut dessa?

Här saknar ordningsföljden uppenbarligen betydelse. Antalet sätt att välja ut de sju frågorna är alltså

$$\binom{10}{7} = \frac{10!}{3!\,7!} = \frac{10\cdot 9\cdot 8\cdot 7!}{3!\,7!} = \frac{10\cdot 9\cdot 8}{3\cdot 2\cdot 1} = 120.$$

b) Antag att frågorna är uppdelade i två grupper om fem. Exakt tre frågor från den första gruppen skall besvaras, och därmed fyra från den andra. Enligt multiplikationsprincipen är antalet urvalsmöjligheter då

$$\binom{5}{3}\cdot\binom{5}{4} = \frac{5!}{2!\,3!}\cdot\frac{5!}{1!\,4!} = \frac{5\cdot 4}{2}\cdot\frac{5}{1} = 50.$$

c) Antag, med samma uppdelning av frågorna, att *minst* tre frågor från den första gruppen skall besvaras. Vi delar då upp i fallen exakt 3, exakt 4, exakt 5 frågor från denna grupp och använder additionsprincipen. Antalet möjligheter blir

$$\binom{5}{3}\cdot\binom{5}{4}+\binom{5}{4}\cdot\binom{5}{3}+\binom{5}{5}\cdot\binom{5}{2} = 50+50+10 = 110.$$

□

Exempel 10. Antalet arrangemang av bokstäverna i *WOOLLOOMOOLOO* (13 bokstäver, varav 8 st. A, och 3 st. L) är

$$\frac{13!}{8!\,3!\,1!\,1!} \quad (= 25\,740),$$

det vet vi med metoden i exempel **??** ovan. Vi frågar nu efter antalet sådana arrangemang utan några *konsekutiva* L (dvs. det får inte finnas några L intill varandra).

För att lösa detta problem tar vi först bort de tre L:en och studerar arrangemangen av de övriga bokstäverna

$$O \quad O \quad O \quad O \quad O \quad O \quad O \quad O \quad W \quad M.$$

Antalet sådana är, med samma teknik som innan,

$$\frac{10!}{8!\,1!\,1!} = 90.$$

För varje sådant arrangemang sätter vi in tre stycken L i de olika *mellanrummen* mellan bokstäverna. På detta sätt får vi alla arrangemang där inga L står intill varandra. Även ytterplatserna ska betraktas som mellanrum här, så antalet sådana är 11 (tio bokstäver). Antalet sätt att välja ut de tre mellanrum där L ska placeras är

$$\binom{10}{3} = \frac{10!}{7!\,3!} = 165.$$

Observera att ordningen är oväsentlig vid detta urval.

Enligt multiplikationsprincipen är nu det sökta antalet arrangemang lika med $90\cdot 165 = 14\,850$.

□

Ibland kan kombinatoriska problem lösas på mer än ett sätt. I själva verket kan det ofta vara en fördel om man kan finna mer än en lösning på ett kombinatoriskt problem, eftersom man då får en bekräftelse på att man tänkt rätt.

Exempel 11. Man vill dela in 36 personer i 4 lika stora grupper. På hur många sätt kan det ske?

Lösning: Kalla grupperna A, B, C, D. Först väljer vi ut grupp A. Detta kan ske på $\binom{36}{9}$ sätt (ordningsföljden är ointressant). Nu återstår 27 personer. Från dessa väljer vi grupp B, vilket kan ske på $\binom{27}{9}$ sätt. Från de återstående 18 personerna kan grupp C väljas på $\binom{18}{9}$ sätt. Resten utgör grupp D, som alltså kan väljas på $\binom{9}{9} = 1$ sätt.

Enligt multiplikationsprincipen blir det totala antalet möjligheter

$$\binom{36}{9} \cdot \binom{27}{9} \cdot \binom{18}{9} \cdot \binom{9}{9} = \frac{36!}{27!\,9!} \cdot \frac{27!}{18!\,9!} \cdot \frac{18!}{9!\,9!} \cdot \frac{9!}{9!\,9!} = \frac{36!}{9!\,9!\,9!\,9!}.$$

Det förenklade svaret ger en antydan om att det finns ett annat sätt att tänka.

Alternativ lösning: Man kan tänka sig att urvalet sker genom att de 36 personerna står på rad, och man förser var och en med en klisterlapp på vilken det står A, B, C eller D. Ett visst urval kan alltså beskrivas som ett arrangemang av 9 stycken vardera av dessa fyra bokstäver. Problemet är alltså hur många arrangemang det finns av symbolerna

$$A \quad A \quad \ldots \quad A \quad B \quad B \quad \ldots \quad B \quad C \quad C \quad \ldots \quad C \quad D \quad D \quad \ldots \quad D,$$

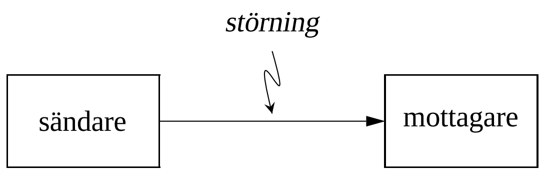
där varje bokstav förekommer nio gånger. Detta slags fråga har vi besvarat flera gånger redan; svaret är en multinomialkoefficient

$$\frac{36!}{9!\,9!\,9!\,9!}.$$

□

Binomialkoefficienter är viktiga, och vi ska diskutera deras egenskaper utförligt om ett litet tag; bland annat ska vi förklara var namnet kommer ifrån. Vi avslutar detta avsnitt med en tillämpning från kodningsteori.

Exempel 12. Inom kodningsteori studerar man metoder att överföra information mellan två kontrahenter, en sändare och en mottagare. Transmissionen sker via en kanal som är utsatt för störningar. Man kan inte vara säker på att det meddelande som når mottagaren överensstämmer med det som utgått från sändaren. Denna felrisk kan man oftast inte göra något åt; kodningsteorin handlar om att finna metoder för mottagaren att upptäcka att ett fel uppstått, och kanske till och med ge honom möjlighet att korrigera felet.



Exempel på den beskrivna situationen är kommunikationen mellan en dator och en terminal, eller överföringen av en ljudsignal från en CD-skiva via en förstärkare till lyssnaren.

Vi antar att alla meddelanden har formen av en *binär* svit av symbolerna 0 och 1 av fix längd n (en så kallad *blockkod*). Antalet sådana sviter är 2^n (multiplikationsprincipen), men det är bara vissa av dessa som ges en mening, representerande en bokstav eller något annat slags tecken. De sviter som är meningsfulla kallas *kodord*. Från sändaren utgår endast sådana. Om ett kodord utsätts för störning under transmissionen kommer mottagaren att nås av en annan svit än den utsända. I bästa fall erhåller då mottagaren en svit som inte är ett kodord. Den har ingen mening, mottagaren inser att ett fel har uppstått och kan vidtaga lämpliga åtgärder (t.ex. begära repetition av det utsända kodordet). Men om det mottagna meddelandet är ett kodord, annat än det utsända, har mottagaren ingen möjlighet att inse att ett fel har uppstått. Han har då erhållit ett felaktigt meddelande. Det är i första hand den sista situationen man vill undvika, men det är ibland också angeläget att mottagaren ur det erhållna felaktiga meddelandet själv kan rekonstruera felet och på så vis komma fram till det korrekta meddelandet.

Genom ett omsorgsfullt val av de sviter som ska utgöra kodord kan dessa saker åstadkommas. Utan att gå in på hur detta görs ska vi här undersöka vad som kan sägas om hur *många* kodord som är möjliga i några olika situationer.

Det är uppenbart att för ett givet kodord (binär svit) kan vi inte tillåta att någon av de sviter man får genom att ändra på en enda plats är ett kodord. Då skulle ju ett fel i en enda position vid transmissionen kunna leda till ett nytt kodord, och mottagaren skulle inte kunna upptäcka att ett fel uppstått. Om exempelvis 01001 är ett kodord ($n = 5$) är följande sviter inte tillåtna som kodord;

$$11001, \qquad 00001, \qquad 01101, \qquad 01011, \qquad 01000.$$

Varje kod som konstrueras under iakttagande av denna restriktion kommer att kunna upptäcka alla *enkelfel* (fel i en enda position). Till varje kodord hör det tydligen n stycken sviter som inte är tillåtna. Å andra sidan förekommer här viss överlappning; om i exemplet ovan 11000 också är ett kodord så leder ett fel i sista positionen till 11001, samma som den första förbjuda sviten ovan. De förbjudna sviterna kan tydligen höra till mer än ett kodord.

Om antalet av kodord och tillhörande förbjudna sviter understiger totala antalet sviter, som är 2^n, finns det plats för ytterligare kodord. För det maximala antalet möjliga kodord x har vi därför en olikhet

$$x + nx \geq 2^n \quad \Longleftrightarrow \quad x \geq \frac{2^n}{n+1}.$$

Det är alltså möjligt att konstruera en kod som kan upptäcka enkelfel innehållande minst $\frac{2^n}{n+1}$ kodord.

Antag att vi ökar ambitionsnivån och vill ha möjlighet att upptäcka även dubbelfel. Då måste vi lägga kodorden glesare. För varje förekommande kodord måste vi se till att de sviter som avviker i en position (n stycken, som ovan) och i två positioner ($\binom{n}{2}$ stycken) inte är kodord. För det maximala antalet möjliga kodord får vi nu olikheten

$$x + nx + \binom{n}{2}x \geq 2^n \quad \Longleftrightarrow \quad x \geq \frac{2^n}{\frac{n(n-1)}{2} + n + 1}.$$

Vi ändrar nu kraven till att konstruera en kod som kan *korrigera* enkelfel. För varje kodord c krävs då att ingen av de sviter (n st.) som avviker i bara en position också har denna egenskap med avseende på något annat kodord c'. Om detta krav tillgodoses, och vi antar att högst enkelfel uppstår, kommer mottagaren av det transmitterade ordet, genom jämförelse med en lista på förekommande kodord, att kunna sluta sig till vilket kodord som utgått från sändaren.

För det maximala antalet möjliga kodord gäller tydligen olikheten

$$x + nx \leq 2^n \quad \Longleftrightarrow \quad x \leq \frac{2^n}{n+1}.$$

Antalet kodord kan inte överstiga $\frac{2^n}{n+1}$. □

Anmärkning. Hur man verkligen väljer sina kodord i praktiken diskuterar vi inte här. Bland annat har man kravet att kodning och avkodning ska kunna ske enkelt och snabbt med hjälp av dator. Detta kräver något slags *algebraisk struktur* hos mängden av kodord.

4 Urval utan hänsyn till ordning med repetition tillåten

Det handlar nu om problemet att från n olika objekt (kulor) välja ut r stycken, utan hänsyn till ordningen och med upprepning tillåten. Inget utesluter naturligtvis att $r \geq n$ här. Detta problem är det svåraste av de fyra, och vi ska formulera om det på några olika sätt innan vi studerar dess lösning.

Låt för $i = 1, \ldots, n$ talet x_i beteckna antalet gånger kula nr i väljes. Då är

$$x_1 + x_2 + \ldots + x_n = r, \tag{3}$$

eftersom det totalt väljes r kulor, och naturligtvis är $x_i \geq 0$ för alla i. Vårt problem är tydligen att bestämma antalet icke-negativa heltalslösningar $(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ till (**??**).

Ekvationen (**??**) uppträder också i samband med ett annat kombinatoriskt problem, ett s.k. *fördelningsproblem*. Vi har r stycken identiska objekt och vi vill placera dem i n olika lådor. På hur många sätt kan detta ske? Om vi här låter x_i beteckna antalet objekt som läggs i låda nummer i så får vi åter (**??**).

Det är denna sista version av problemet som kommer att ge oss dess lösning.

SATS 1. *Antalet icke-negativa heltalslösningar* $(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ *till* (**??**) *är*

$$\binom{n+r-1}{r}.$$

BEVIS. Vi genomför beviset genom att lösa fördelningsproblemet ovan. Vi lägger objekten på rad och placerar in $n-1$ stycken mellanväggar för att markera vilka objekt som hamnar i respektive låda.

$$\bullet \quad \bullet \quad \cdots \quad \bullet \;\Big|\; \bullet \quad \cdots \quad \bullet \;\Big|\quad\Big|\; \bullet \quad \cdots \quad \bullet \;\Big|\; \bullet \;\Big|\; \bullet \quad \cdots \quad \bullet$$

låda 1 låda 2 låda 3 $\cdots$ låda n

Här har vi totalt $n + r - 1$ objekt, r stycken $\bullet$ och $n-1$ stycken $|$, och vi är intresserade av antalet sätt att arrangera dessa. Detta antal är lika med

$$\frac{n+r-1}{r!\,(n-1)!} = \binom{n+r-1}{r}$$

(se exempel **??**). □

Exempel 13. Tolv hallonbåtar ska delas ut till fyra barn, Anders, Bertil, Cecilia och Doris. På hur många sätt kan denna fördelning ske?

Lösning: Här har vi fördelningsproblemet ovan, med barnen som lådorna och hallonbåtarna som kulorna. Antalet sätt att fördela godisbitarna är således enligt sats **??**

$$\binom{4+12-1}{12} = \binom{15}{12}.$$

Detta är problemet med antalet icke-negativa heltalslösningar till

(4) $$x_A + x_B + x_C + x_D = 12,$$

där x_A betecknar antalet hallonbåtar som Anders får, etc. Vi kan också uppfatta frågeställningen som ett urvalsproblem; 12 gånger skall man välja en av Anders, Bertil, Cecilia, Doris. Upprepning är tillåten och ordningen irrelevant. □

Exempel 14. Antag att vi modifierar exempel **??** ovan genom att införa kravet att alla barn ska få minst en hallonbåt. Hur många möjligheter finns det då?

Lösning: Vi börjar med att ge varje barn en hallonbåt. Sedan återstår 8 stycken, vilka skall distribueras till de fyra barnen enligt samma regler som förut. Enligt sats **??** blir antalet möjligheter
$$\binom{4+8-1}{8} = \binom{11}{8}.$$

Det finns ett annat sätt att hantera problemet, som kan vara lättare att generalisera till andra situationer. Frågeställningen innebär att vi söker antalet heltalslösningar till (**??**) med $x_A, x_B, x_C, x_D \geq 1$. Vi kan återföra oss på den tidigare situationen genom att införa nya obekanta i ekvationen. Sätt $y_A = x_A - 1$ och likadant för de andra obekanta. I stället för (**??**) får vi
$$y_A + y_B + y_C + y_D = 12 - 4 = 8,$$
med $y_A \geq 0$, etc. Vi söker antalet heltalslösningar till denna ekvation; enligt sats **??** är svaret $\binom{4+8-1}{8} = \binom{11}{8}$. □

Exempel 15. Betrakta följande avsnitt i ett datorprogram:

```
a:=0;
for i:= 1 to 25
   for j:= 1 to i
     for k:=1 to j
       a:=a+1;
```

Vilket värde har variabeln a när programslingan genomlupits?

Lösning: Med start i 0 ökas variabeln a med 1 för varje (i, j, k) med $1 \leq k \leq j \leq i \leq 25$. Det handlar om ett urval av 3 tal bland $1, \ldots, 25$, med upprepning och utan hänsyn till ordningen, dvs. om heltalslösningar till ekvationen

$$x_1 + \ldots + x_{25} = 3.$$

Antalet sådana är $\binom{25+3-1}{3} = \binom{27}{3} = 2925$, som alltså är slutvärdet på a. □

5 Binomialkoefficienter. Binomialsatsen

Vi erinrar om definitionen; binomialkoefficienterna definieras av

$$\binom{n}{r} = \frac{n!}{(n-r)!\,r!}, \qquad 0 \le r \le n. \tag{5}$$

(För andra heltal r tolkas de som 0.) Binomialkoefficienterna har en kombinatorisk tolkning som vi redan diskuterat: *antalet sätt att välja ut r objekt från n olika utan repetition och utan hänsyn till ordningen är* $\binom{n}{r}$. Detta kan också formuleras med termer från mängdläran. Att välja ut r objekt från de n givna innebär ju att man definierar en *delmängd* av mängden av de n objekten. Således:

antalet delmängder med r element till en mängd med n element är $\binom{n}{r}$.

Speciellt för $r = 0$ finns $\binom{n}{0} = 1$ delmängder; den *tomma* mängden som inte har några element.

Följande sats sammanfattar några viktiga egenskaper hos binomialkoefficienter.

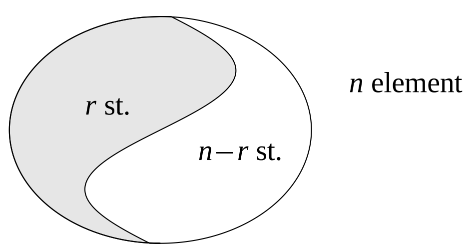
SATS 2. *För binomialkoefficienter gäller följande identiteter.*

a) $$\binom{n}{r} = \binom{n}{n-r},$$

b) $$\binom{n+1}{r} = \binom{n}{r} + \binom{n}{r-1}.$$

BEVIS. Satsen kan naturligtvis bevisas genom att man utnyttjar definitionen (**??**) och i fallet b) sätter högra ledet på gemensam nämnare. Läsaren bör genomföra detta bevis på egen hand (nyttig övning). Vi ska här i stället ge ett *kombinatoriskt* bevis, som är instruktivt genom att det ger en förklaring till formlernas utseende. Därmed blir de lättare att komma ihåg i fortsättningen.

a) Betrakta en mängd M med n element. I vänster led betyder $\binom{n}{r}$ antalet delmängder till M med r element. Men varje gång vi väljer ut en delmängd med r element definierar vi också en delmängd med $n-r$ element, nämligen de som vi lämnat kvar. Därför finns det lika många delmängder med r element som med $n-r$ element.



b) Betrakta en mängd M med $n+1$ element, och beteckna ett av dessa med x. På vänster sida i formeln står antalet delmängder till M med r element. Vi ska visa att summan i höger led betyder samma sak. Dela upp i två fall: räkna först de delmängder till M som inte innehåller x och sedan de som innehåller x.

För att bilda en delmängd med r element till M som *inte* innehåller x ska vi välja r element från n stycken (alla element i M utom x). Antalet sätt att göra detta är $\binom{n}{r}$, den första termen i högra ledet. För att bilda en delmängd med r element som innehåller x väljer vi först x och skall sedan välja ut $r-1$ element bland de återstående n. Antalet sätt att göra det är $\binom{n}{r-1}$, den andra termen i höger led. — Sammanlagt har vi nu räknat samtliga delmängder i M med r element, varför formeln är bevisad. □

Som en följd av satsen får vi följande schema för binomialkoefficienterna, *Pascals triangel*.

$$
\begin{array}{ccccccccccc}
 & & & & & \binom{0}{0} & & & & & \\
 & & & & \binom{1}{0} & & \binom{1}{1} & & & & \\
 & & & \binom{2}{0} & & \binom{2}{1} & & \binom{2}{2} & & & \\
 & & \binom{3}{0} & & \binom{3}{1} & & \binom{3}{2} & & \binom{3}{3} & & \\
 & \binom{4}{0} & & \binom{4}{1} & & \binom{4}{2} & & \binom{4}{3} & & \binom{4}{4} & \\
\binom{5}{0} & & \binom{5}{1} & & \binom{5}{2} & & \binom{5}{3} & & \binom{5}{4} & & \binom{5}{5} \\
 & & & & & \dots & & & & &
\end{array}
$$

Här är varje koefficient summan av de två som står snett ovanför.

Eftersom $\binom{n}{0} = \binom{n}{n} = 1$ för alla n kan vi med start uppifrån snabbt och enkelt skriva ut värden på alla lägre binomialkoefficenter i schemat.

$$
\begin{array}{ccccccccccc}
 & & & & & 1 & & & & & \\
 & & & & 1 & & 1 & & & & \\
 & & & 1 & & 2 & & 1 & & & \\
 & & 1 & & 3 & & 3 & & 1 & & \\
 & 1 & & 4 & & 6 & & 4 & & 1 & \\
1 & & 5 & & 10 & & 10 & & 5 & & 1 \\
 & & & & & \dots & & & & &
\end{array}
$$

Vi kan nu förklara namnet ”binomialkoefficient”. Betrakta några potenser av *binomet* $x+y$:

$$
\begin{aligned}
(x+y)^2 &= x^2+2xy+y^2 \\
(x+y)^3 &= x^3+3x^2y+3xy^3+y^3
\end{aligned}
$$

Koefficienterna här är precis de tal som står i andra och tredje raden i Pascals triangel (om vi numrerar raderna så att den översta ettan är rad noll). Detta är ingen tillfällighet; vi har även

$$(x+y)^4 = x^4 + 4x^3y + 6x^2y^2 + 4xy^3 + y^4$$

och allmänt:

SATS 3. (BINOMIALSATSEN) *För utvecklingen av $(x+y)^n$ gäller*

$$(x+y)^n = \binom{n}{0}x^n + \binom{n}{1}x^{n-1}y + \binom{n}{2}x^{n-2}y^2 + \ldots + \binom{n}{n}y^n,$$

eller med summatecken

$$(x+y)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} x^{n-k}y^k.$$

BEVIS. Det är klart att successiv ihopmultiplikation av faktorerna i

$$(x+y)^n = (x+y)\cdot(x+y)\cdot\ \ldots\ \cdot(x+y)$$

leder till ett antal termer av formen

$$x^{n-r}y^r$$

med r varierande från 0 till n, precis som i den angivna formeln. Det vi behöver visa är att koefficienterna i formeln är de rätta, dvs. att man för ett fixt r får precis $\binom{n}{r}$ stycken termer $x^{n-r}y^r$ vid hopmultipliceringen. Men en sådan term får vi ju varje gång vi väljer y från exakt r parenteser $(x+y)$, och x från de övriga. Antalet sätt att välja ut r parenteser från n är $\binom{n}{r}$; därför är detta koefficienten för $x^{n-r}y^r$. □

Exempel 16. Bestäm den konstanta termen i binomialutvecklingen av $\left(2x^4 + \frac{1}{x}\right)^{10}$.

Lösning: Här uppfattar vi x som en variabel; den konstanta termen är den som inte innehåller x, eller om man så vill, som innehåller x^0. Det är naturligtvis inte alls givet att det finns en sådan term. Det ingår i uppgiften att undersöka detta.

Enligt binomialsatsen är

$$\left(2x^4 + \frac{1}{x}\right)^{10} = \sum_{k=0}^{10} \binom{10}{k} (2x^4)^{10-k} \left(\frac{1}{x}\right)^k = \sum_{k=0}^{10} \binom{10}{k} 2^{10-k}x^{40-5k}.$$

Vi får termen innehållande x^0 då $40-5k=0$, dvs. då $k=8$. Detta är ett heltal mellan 0 och 10, alltså finns en sådan term. Den är lika med

$$\binom{10}{8} 2^2x^0 = 45\cdot 4 = 180.$$

□

FÖLJDSATS 1. *Vi har att*

a) $$\binom{n}{0} + \binom{n}{1} + \binom{n}{2} + \ldots + \binom{n}{n} = 2^n,$$

b) $$\binom{n}{0} - \binom{n}{1} + \binom{n}{2} - \ldots + (-1)^n\binom{n}{n} = 0.$$

BEVIS. Den första formeln får man genom att sätta $x = 1$, $y = 1$ i binomialsatsen. Då får man nämligen

$$2^n = (1+1)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} 1^{n-k} 1^k = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k}.$$

Den andra formeln får man på samma sätt genom att sätta $x = 1$, $y = -1$. □

Summerar man radvis i Pascals triangel får man tydligen en tvåpotens. Till exempel är $1+2+1 = 4$ och $1+3+3+1 = 8$. Läsaren bör själv kontrollera några rader till.

Exempel 17. Den första formeln i följdsatsen kan även bevisas kombinatoriskt. Vi vet att $\binom{n}{k}$ betyder antalet delmängder med k element till en mängd M med n element. Summerar vi över alla k får vi det totala antalet delmängder till M. Men detta antal är precis 2^n (se exempel **??**). □

Exempel 18. Genom att i den andra formeln i följdsatsen flytta över alla termer med minustecken till höger sida får man

$$\sum_{\substack{k=0 \\ k \text{ jämnt}}}^{n} \binom{n}{k} = \sum_{\substack{k=0 \\ k \text{ udda}}}^{n} \binom{n}{k}.$$

Den kombinatoriska innebörden av detta är att

> *för en given mängd M är antalet delmängder med ett jämnt antal element lika med antalet delmängder med ett udda antal element.*

Om M har n element är det totala antalet delmängder lika med 2^n (exempel **??**). Det följer att antalet delmängder med ett udda (eller jämnt) antal element är $\frac{1}{2} \cdot 2^n = 2^{n-1}$.

Ett annat bevis för detta resultat får man från Pascals triangel. På grund av rekursionsformeln för binomialkoefficienter (den andra formeln i sats **??**) är summan av varannan koefficient i rad n i Pascals triangel lika med summan av alla element i raden ovanför, som är lika med 2^{n-1} enligt exempel **??**. □

Multinomialkoefficienter

Vi ska nu studera en generalisering av binomialkoefficienterna. Antag att $n_1 + n_2 + \ldots + n_k = n$, där alla n_i är icke-negativa heltal. Då definieras tillhörande *multinomialkoefficient* som talet

$$\binom{n}{n_1, n_2, \ldots, n_k} = \frac{n!}{n_1!\, n_2! \ldots n_k!}.$$

Vi har träffat på sådana tidigare (se anmärkningen till exempel **??**, sidan **??**). Av exempel **??** framgår den kombinatoriska betydelsen:

> *antalet arrangemang av n_1 stycken likadana objekt A_1, n_2 objekt A_2, ..., n_k objekt A_k är*
>
> $$\binom{n}{n_1, n_2, \ldots, n_k},$$
>
> *där $n = n_1 + n_2 + \ldots + n_k$.*

För exempel, se exempel **??**.

Då $k = 2$ återfår vi binomialkoefficienterna, ty

$$\binom{n}{n_1, n_2} = \frac{n!}{n_1!\, n_2!} = \frac{n!}{(n-n_2)!\, n_2!} = \binom{n}{n_2} = \binom{n}{n_1}.$$

Vi har nu följande generalisering av binomialsatsen.

SATS 4. (MULTINOMIALSATSEN) *Utveckling av* $(x_1 + x_2 + \ldots + x_k)^n$ *leder till*

$$(x_1 + x_2 + \ldots + x_k)^n = \sum_{\substack{n_1+n_2+\ldots+n_k = n \\ n_1, n_2, \ldots, n_k \geq 0}} \binom{n}{n_1, n_2, \ldots, n_k} x_1^{n_1} x_2^{n_2} \ldots x_k^{n_k}. \tag{6}$$

Summationen sker här över alla k-tipler $(n_1, n_2, \ldots, n_k)$ med alla $n_i \geq 0$ och $n_1+n_2+\ldots+n_k = n$.

BEVIS. Som i beviset för binomialsatsen är det uppenbart att hopmultipliceringen av n parenteser $(x_1 + x_2 + \ldots + x_k)$ leder till en summa av termer $x_1^{n_1} x_2^{n_2} \ldots x_k^{n_k}$ med lämpliga koefficienter. Det gäller alltså att inse att dessa koefficienter är precis multinomialkoefficienterna.

För en bestämd uppsättning $(n_1, n_2, \ldots, n_k)$ får vi produkten $x_1^{n_1} x_2^{n_2} \ldots x_k^{n_k}$ varje gång vi väljer x_1 ur exakt n_1 av parenteserna $(x_1 + x_2 + \ldots + x_k)$, x_2 ur exakt n_2 parenteser, etc. Antalet sådana urval är lika med antalet sätt att arrangera n_1 symboler x_1, n_2 symboler x_2, $\ldots$, alltså lika med

$$\frac{n!}{n_1!\, n_2! \ldots n_k!} = \binom{n}{n_1, n_2, \ldots, n_k}$$

Därför blir detta koefficienten framför $x_1^{n_1} x_2^{n_2} \ldots x_k^{n_k}$. □

Vi avslutar med ett kombinatoriskt exempel.

Exempel 19. Hur många termer ingår i multinomialutvecklingen (**??**) av

$$(x_1 + x_2 + \ldots + x_k)^n\,?$$

Lösning: Antalet termer är lika med antalet k-tipler $(n_1, n_2, \ldots, n_k)$ med

$$n_1 + n_2 + \ldots + n_k = n$$

och alla n_i icke-negativa. Enligt sats **??** är detta antal lika med

$$\binom{k+n-1}{n}.$$

□

6 Sammanfattning

Olika slags urval

Vi har bland annat diskuterat antalet sätt att välja ut r objekt från n stycken olika under varierande betingelser. De viktigaste resultaten framgår av följande tabell.

	med återläggning	utan återläggning
med hänsyn till ordning	n^r	$P(n,r) = \dfrac{n!}{(n-r)!}$
utan hänsyn till ordning	$\dbinom{n+r-1}{r}$	$\dbinom{n}{r}$

Binomialkoefficienter

Den viktigaste egenskapen hos binomialkoefficienterna är rekursionsformeln från sats **??**

$$\binom{n+1}{r} = \binom{n}{r} + \binom{n}{r-1}.$$

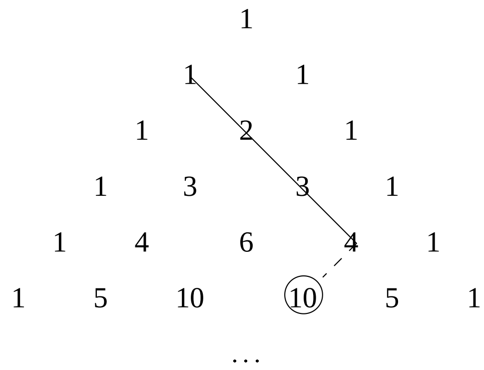
Pascals triangel följer ur denna samt att $\dbinom{n}{0} = \dbinom{n}{n} = 1$ för alla n.

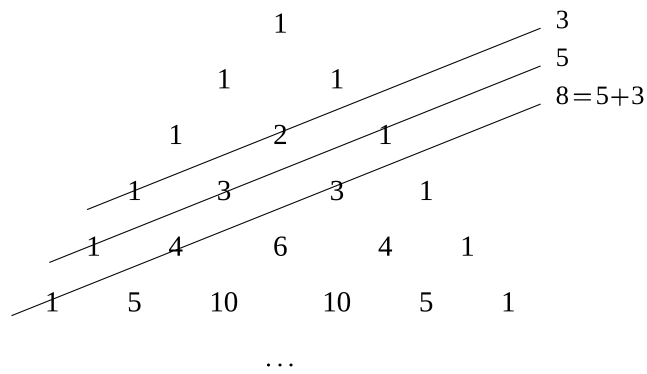
Binomialkoefficienterna har många intressanta egenskaper som kan åskådliggöras i Pascals triangel:

- Summan av alla koefficienterna i en rad är en potens av 2. (Följdsatsen till binomialsatsen.)
- Den alternerande summan av alla koefficienterna i en rad är noll. (Följdsatsen till binomialsatsen.)
- Summan av varannan koefficient i en rad blir också en 2-potens (exempel **??**).

För den intresserade beskriver vi några andra relationer mellan binomialkoefficienter.

- Summan av kvadraterna av alla koefficienterna i rad n är lika med binomialkoefficienten $\dbinom{2n}{n}$ i mitten på rad $2n$. (Kommer som övning.) Till exempel (rad 3) är $1^2+3^2+3^2+1^2 = 20 = \dbinom{6}{3}$.
- Summerar man några steg in parallellt med en sida i triangeln så blir summan en binomialkoefficient ett steg längre ner. Se figuren till vänster nedan. (Kommer som övning.)
- Summerar man på snedden får man de s.k. *Fibonaccitalen* F_i, definierade av rekursionsformeln $F_i = F_{i-1} + F_{i-2}$. Vi kommer att träffa på dessa senare i kursen. Se figuren till höger nedan. Läsaren uppmanas att försöka inse detta med utgångspunkt från rekursionsformeln för binomialkoefficienter.


1
1 1
1 2 1
1 3 3 1
1 4 6 4 1
1 5 10 10 5 1
...


1
1 1
1 2 1
1 3 3 1
1 4 6 4 1
1 5 10 10 5 1
...
3
5
8 = 5+3