# Sammanfattning 9

**Från Sats 10.1**: $f \star g = \int_{-\infty}^{\infty} f(t-\tau)g(\tau)d\tau \overset{[t-\tau=x]}{=} \int_{\infty}^{-\infty} f(x)g(t-x)(-1)dx = g \star f.$

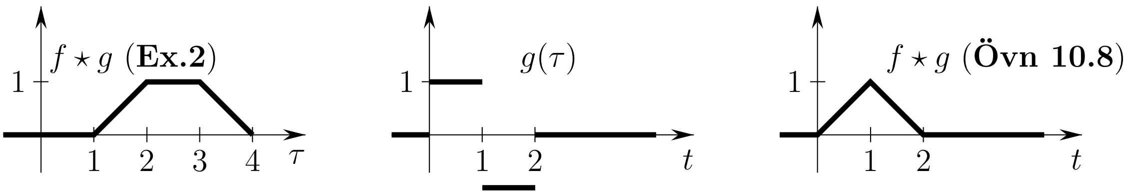
**Definition**: $f \in \mathscr{L}_1$ (kallas **absolut integrerbar**) om $\int_{-\infty}^{\infty} |f(\tau)|d\tau$ är konvergent.

Alla funktioner kan inte faltas. En del funktioner vet vi att de kan faltas:
$f \in \mathscr{L}_1$ och $g \in \mathscr{L}_1 \;\Rightarrow (f \star g) \in \mathscr{L}_1$.
$f \in \mathscr{L}_1$ och $g$ begränsad $\Rightarrow (f \star g)$ begränsad.
$f$ kausal och $g$ kausal $\Rightarrow (f \star g)$ kausal.

**Ex 1**: $(\theta \star \theta)(t) = \int_{-\infty}^{\infty} \theta(t-\tau)\theta(\tau)d\tau = \int_0^{\infty} \theta(t-\tau)d\tau = \theta(t)\int_0^t 1\, d\tau = t\theta(t).$
**Notera**: Faltningar mellan kausala funktioner följer samma mönster som detta exempel.

**Ex 2**: $f(t) = \theta(t) - \theta(t-1)$ och $g(t) = \theta(t-1) - \theta(t-3)$, dvs två rektangelpulser.
Faltningen kan räknas direkt med definitionen eller via förskjutningsregeln:

$$\begin{aligned}(\theta - T_1\theta)\star(T_1\theta - T_3\theta) &= \theta \star T_1\theta - \theta \star T_3\theta - (T_1\theta)\star(T_1\theta) + (T_1\theta)\star(T_3\theta)\\ &= (T_1 - T_2 - T_3 + T_4)(\theta\star\theta)\\ &= (t-1)\theta(t-1) - (t-2)\theta(t-2) - (t-3)\theta(t-3) + (t-4)\theta(t-4).\end{aligned}$$




**Övn 10.8** a) Se figurerna ovan för $f$ och $g$. b) $f \star g = (I - 2T_1 + T_2)(\theta \star \theta)$ (se figur ovan).
c)$g \star h = 0 = f \star (g \star h)$, medan $(f \star g) \star h = 1$ (notera att $f \notin \mathscr{L}_1$).

**Sats 10.4** (s 193): $\mathcal{S}_1$, $\mathcal{S}_2$ lineära och tidsinvarianta system med impulssvar $h_1$ resp $h_2$.
Sammansättningen $\mathcal{S} = \mathcal{S}_2 \circ \mathcal{S}_1$ har impulssvar $h = h_2 \star h_1$.
**Bevis**: Givet att sammansättningsregeln håller (t ex för kausala system) $\mathcal{S}w = \mathcal{S}_2(\mathcal{S}_1 w) = \mathcal{S}_2(h_1 \star w) = h_2 \star (h_1 \star w) = (h_2 \star h_1) \star w$.

**Definition**: **Stegsvar** $\mathcal{S}\theta = h \star \theta = \int_{-\infty}^{t} h(\tau)d\tau$ (för ett lineärt, tidsinvariant system).

**Sats 10.5** $\dfrac{d\mathcal{S}\theta}{dt} = h(t)$.

**Övn 10.15** $\begin{cases} m\ddot{x} &= -kx + w(t) \\ y &= x \end{cases}$ Lineärt, tidsinvariant och kausal system (använd $x(0) = 0 = \dot{x}(0)$).

a) Stegsvaret: $w(t) = \theta(t)$ och $\begin{cases} m\ddot{x} = -kx & t<0 \\ m\ddot{x} = -kx + 1 & t > 0\end{cases}$ Passningsmetoden: $x(t)$ kontinuerlig vid $t = 0$.

$x(t) = (\mathcal{S}\theta)(t) = \dfrac{1}{k}(1 - \cos\sqrt{\dfrac{k}{m}}t)\theta(t).$

b) Impulssvar: $h(t) = \dfrac{d\mathcal{S}\theta}{dt} = \dfrac{1}{\sqrt{km}}\sin\left(\sqrt{\dfrac{k}{m}}t\right)\theta(t).$

c) $(\mathcal{S}w)(t) = \int_{-\infty}^{\infty} \dfrac{1}{\sqrt{km}}\sin\left(\sqrt{\dfrac{k}{m}}(t-\tau)\right)\theta(t-\tau)w(\tau)d\tau = \int_{-\infty}^{t}\dfrac{1}{\sqrt{km}}\sin\left(\sqrt{\dfrac{k}{m}}(t-\tau)\right)w(\tau)d\tau.$

**Övn 10.10** Summan av två oberoende stokastiska variabler $X$ och $Y$ med fördelningsfunktion (kallad frekvensfunktion) $f_X$ resp $f_Y$ har fördelningsfunktionen:
$f_{X+Y}(x) = \int_{-\infty}^{\infty} f_X(x-z) f_Y(z) dz.$

$$\text{a)}\, f_{X+Y}(x) = \int_{-\infty}^{\infty} 2e^{-2(x-z)}\theta(x-z)3e^{-3z}\theta(z)dz = \int_{0}^{\infty} 2e^{-2(x-z)}\theta(x-z)3e^{-3z}dz$$
$$= 6\theta(x)\int_0^x e^{-2(x-z)}e^{-3z}dz = 6\theta(x)(e^{-2x}-e^{-3x}).$$

$$\text{b)}\, f_{X+Y}(x) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{1+(x-z)^2}(\theta(z+1)-\theta(z-1))dz = \frac{1}{2\pi}\int_{-1}^{1}\frac{1}{1+(x-z)^2}dz$$
$$= -\frac{1}{2\pi}\arctan(x-z)|_{-1}^{1} = \frac{1}{2\pi}(\arctan(x+1)-\arctan(x-1)).$$

c) $f_{X+Y}(x) = \frac{1}{4}\int_{-\infty}^{\infty} e^{-|x-z|}(\theta(z+1)-\theta(z-1))dz = \frac{1}{4}\int_{-1}^{1} e^{-|x-z|}dz$. $z$ löper alltid mellan $-1$ och $1$ och då ser $|x-z|$ olika ut beroende på hur $x$ förhåller sig till intervallet $[-1,1]$.

$$x < -1: \qquad |x-z| = z-x, \qquad I = \frac{1}{4}\int_{-1}^{1} e^{-(z-x)}dz = \frac{1}{4}(e^{x+1}-e^{x-1}).$$

$$-1 < x < 1: \quad \left\{\begin{array}{ll} z<x: & |x-z| = x-z \\ z>x: & |x-z| = z-x \end{array}\right\} \quad I = \frac{1}{4}\left(\int_{-1}^{x} e^{-(x-z)}dz + \int_{x}^{1} e^{-(z-x)}dz\right) =$$
$$\frac{1}{4}(2-e^{-(x+1)}-e^{x-1}).$$

$$x > 1: \qquad |x-z| = x-z, \qquad I = \frac{1}{4}\int_{-1}^{1} e^{-(x-z)}dz = \frac{1}{4}(e^{1-x}-e^{-1-x}).$$

$$f_{X+Y}(x) = \frac{1}{2}\cdot\left\{\begin{array}{ll} e^{-|x|}\sinh 1, & |x| \geq 1 \\ 1-\frac{1}{e}\cosh x, & |x| \leq 1. \end{array}\right.$$

$$\text{d)}\, f_{X+Y}(x) = \frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty} e^{-(x-z)^2}e^{-z^2}dz.$$