Sammanfattning 7

Från förra veckan vet vi att systemet $\mathsf{x}(k+1) = \mathsf{A}\mathsf{x}(k)+\mathsf{B}\mathsf{w}(k)$, $k = 0, 1, \cdots$ har lösningen $\mathsf{x}(k) = \mathsf{A}^k\mathsf{x}(0) + \sum_{j=0}^{k-1} \mathsf{A}^{k-1-j}\mathsf{B}\mathsf{w}(j)$, $k = 1, 2, \cdots$. Utsignalen är $\mathsf{y}(k) = \mathsf{C}\mathsf{x}(k) + \mathsf{D}\mathsf{w}(k)$.

Motsvarigheten till **enhetspulsen** för diskreta system är: $\delta(k) = \begin{cases} 1 & \text{om } k = 0 \\ 0 & \text{för övrigt.} \end{cases}$

Svaret y som fås då $\mathsf{w}(k) = \delta(k)$, givet $\mathsf{x}(0) = 0$ kallas **impulssvaret** h:

$\mathsf{h}(k)=\begin{cases} D & k = 0 \\ CA^{k-1}B & k \geq 1. \end{cases}$ Godtycklig insignal och $\mathsf{x}(0) = 0$:

$$\boxed{\begin{aligned}\mathsf{y}(k) &= \textstyle\sum_{j=0}^{k-1} CA^{k-1-j}B\mathsf{w}(j) + \mathsf{D}\mathsf{w}(k) \\ &= \textstyle\sum_{j=0}^{k} \mathsf{h}(k-j)\mathsf{w}(j).\end{aligned}}$$

Definition: $\mathsf{h} \circledast \mathsf{w} = \sum_{j=0}^{k} \mathsf{h}(k-j)\mathsf{w}(j)$ kallas **faltning** mellan h och w.

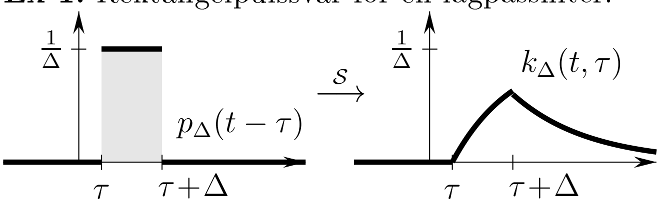
Ur impulssvaret h för ett system, kan vi härleda systemets svar för godtycklig insignal w.

MÅL: Ur svaret för en standardsignal härled svaret för godtycklig insignal.

Vi vill troliggöra att $h(t) = S(\delta(t))$ på något sätt gäller även för tidskontinuerliga system.

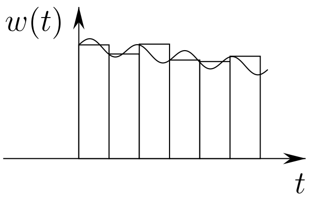
Definition: **rektangelpulssvar** (vid tiden τ) $k_\Delta(t, \tau)$ kallas systemets svar då insignalen är en enhetspuls (vid tiden τ), dvs $\mathsf{w}(t) = p_\Delta(t-\tau)$.
Definition: **impulssvar** $k(t, \tau) = \lim_{\delta \to 0^+} k_\Delta(t, \tau)$.

Ex 1. Rektangelpulssvar för en lågpassfilter:



$$k_\Delta(t,\tau) = \begin{cases} 0 & t < \tau \\ \frac{1-e^{-\frac{t-\tau}{RC}}}{\Delta} & \tau < t < \tau+\Delta \\ \frac{e^{-\frac{t-\tau-\Delta}{RC}} - e^{-\frac{t-\tau}{RC}}}{\Delta} & t > \tau+\Delta. \end{cases}$$

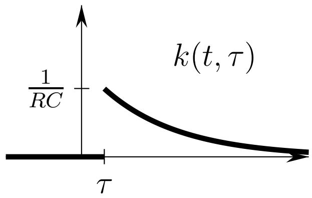
Om insignalen approximeras med rektangelpulser kan utsignalen approximeras med rektangelpulssvar:



$$w(t) \approx \sum_k w(\tau_k)p_{\Delta_k}(t-\tau_k)\Delta_k$$
$$(\mathcal{S}w)_\Delta(t) \approx \sum_k w(\tau_k)k_{\Delta_k}(t,\tau_k)\Delta_k$$

På samma sätt kan vi hoppas på att $(\mathcal{S}w)(t) = \lim_{\Delta_k \to 0^+} (\mathcal{S}w)_\Delta(t) = \int_{-\infty}^{\infty} k(t,\tau)w(\tau)d\tau.$

Ex. 2: Impulssvaret för lågpassfiltret: $k(t,\tau) = \begin{cases} 0 & t < \tau \\ \frac{e^{-\frac{t-\tau}{RC}}}{RC} & t > \tau. \end{cases}$



Övn 9.8 $k(t,\tau) = (t^2-\tau^2)\theta(t-\tau)$. Beräkna svaret för a) $w(t) = \theta(t)$ och b) $w(t) = \theta(t-1)$.
a) $(\mathcal{S}w)(t) = \int_{-\infty}^{\infty}(t^2-\tau^2)\theta(t-\tau)\theta(\tau)d\tau = \int_0^{\infty}(t^2-\tau^2)\theta(t-\tau)d\tau = \frac{2}{3}t^3\theta(t)$.
b) $(\mathcal{S}w)(t) = \int_{-\infty}^{\infty}(t^2-\tau^2)\theta(t-\tau)\theta(\tau-1)d\tau = \int_1^{\infty}(t^2-\tau^2)\theta(t-\tau)d\tau = \frac{1}{3}(2t^3+3t^2+1)\theta(t-1)$.

Definition: $\mathcal{S}$ är tidsinvariant om för alla tal a och alla insignaler $w(t)$, om $y(t) = (\mathcal{S}w)(t)$ då gäller att insignalen $w(t-a)$ ger utsignalen $y(t-a)$.

Ex. 3: Visa att lågpassfiltret är tidsinvariant. Först räknar vi vad insignalen $w(t)$ ger som utsignal: $y(t) = \displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{RC} e^{-(t-\tau)/RC} \theta(t-\tau) w(\tau) d\tau$. Sen räknar vi ut vilken utsignal fås ut av insignalen $w_2(t) = w(t-a)$: $(\mathcal{S}w_2)(t) = \displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{RC} e^{-(t-\tau)/RC} \theta(t-\tau) w(\tau - a) d\tau$.
Substitutionen $s = \tau - a$ ger $(\mathcal{S}w_2)(t) = \displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{RC} e^{-(t-s-a)/RC} \theta(t-s-a) w(s) ds = y(t-a)$.

Övn 9.12: I övningen **9.8** är utsignalen $\frac{2}{3} t^3 \theta(t)$ då insignalen är $w(t) = \theta(t)$, men däremot är utsignalen för $\theta(t-1)$ **INTE** lika med $\frac{2}{3}(t-1)^3 \theta(t-1)$ (kolla svaret ovan). Därmed är systemet **INTE** tidsinvariant.

Om $\mathcal{S}$ är lineär och tidsinvariant så gäller $\delta(t-a) \xrightarrow{\mathcal{S}} k(t,a)$ (impuls/impulssvar). På samma sätt $\delta(t) \xrightarrow{\mathcal{S}} k(t,0)$, som vi kallade *impulssvar***et** $h(t)$. Tidsinvariansen ger därefter att $k(t,a) = h(t-a)$ och då kan vi skriva:

$\boxed{(\mathcal{S}w)(t) = \displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} h(t-\tau) w(\tau) d\tau}$, vilket var målet från början.

Ex. 4: Lågpassfiltret igen! $h(t) = \frac{1}{RC} e^{-(t)/RC} \theta(t)$.