Sammanfattning 4

Definition: Systemet $\dot{x} = Ax$ kallas

$$\begin{array}{rcl} \textbf{stabilt} & \text{om} & \lim_{t\to+\infty} x(t) = 0 \text{ för varje lösning } x. \\ \textbf{neutralt stabilt} & \text{om} & |x(t)| < C \text{ för varje lösning och} \\ & & \lim_{t\to+\infty} x(t) \neq 0 \text{ för någon lösning } x. \\ \textbf{instabilt} & \text{om} & \text{det finns någon obegränsad lösning.} \end{array}$$

Motsvarande gäller för systemet $v(k+1) = Av(k)$, då ”$t \to +\infty$” ersätts med ”$k \to +\infty$”. Vi kommer att se att stabiliteten hänger på egenvärdena och diagonaliserbarhet.

Definition: $\sigma(A) = max_{1\leq k\leq n}\Re(\lambda_k)$.

Sats 4.1 För A diagonaliserbar, systemet $\dot{x} = Ax$ är

$$\begin{array}{rcl} \textbf{stabilt} & \Leftrightarrow & \sigma(A) < 0. \\ \textbf{neutralt stabilt} & \Leftrightarrow & \sigma(A) = 0. \\ \textbf{instabilt} & \Leftrightarrow & \sigma(A) > 0. \end{array}$$

Om A är ej diagonaliserbar, förekommer det polynom $p(t)$ i lösningen utöver $e^{\lambda t}$. Motsvarande sats som omfattar både diagonaliserbara och ej diagonaliserbara matriser lyder

Sats 4.2 För systemet $\dot{x} = Ax$ gäller att

$$\begin{array}{rcl} \sigma(A) < 0 & \Leftrightarrow & \text{systemet är } \textbf{stabilt}. \\ \sigma(A) = 0 & \Rightarrow & \text{systemet är } \textbf{neutralt stabilt} \text{ eller } \textbf{instabilt}. \\ \sigma(A) > 0 & \Rightarrow & \text{systemet är } \textbf{instabilt}. \end{array}$$

Ex 1: $A = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \to \lambda_k = -1, +i, -i.$

$$x(t) = c_1e^{-t}S_1 + c_2e^{it}S_2 + c_3e^{-it}S_3. \quad \boxed{\text{neutralt stabilt}}$$

Ex 2: $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \to \lambda_k = -1, 0 \text{ (dubbelt)} \to \begin{cases} x_1(t) = c_2t + c_1 \\ x_2(t) = c_2 \\ x_3(t) = c_3e^{-t} \end{cases} \quad \boxed{\text{instabilt}}$

$A = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \to \lambda_k = -1 \text{ (dubbelt)}, 0 \to \begin{cases} x_1(t) = (c_1 + c_2t)e^{-t} \\ x_2(t) = c_2e^{-t} \\ x_3(t) = c_3 \end{cases} \quad \boxed{\text{neutralt stabilt}}$

Läs sats 4.3.

Motsvarigheten till **Sats 4.2** för tidsdiskreta system $v(k+1) = Av(k)$ säger:

$$\begin{array}{rcl} \max_k |\lambda_k| < 1 & \Leftrightarrow & \text{systemet är } \textbf{stabilt}. \\ \max_k |\lambda_k| = 1 & \Rightarrow & \text{systemet är } \textbf{neutralt stabilt} \text{ eller } \textbf{instabilt}. \\ \max_k |\lambda_k| > 1 & \Rightarrow & \text{systemet är } \textbf{instabilt}. \end{array}$$

OBS! även **Sats 4.1** har en diskret motsvarighet.

Ex 3: $A = \begin{pmatrix} 0.3 & 0.7 \\ 0.6 & 0.4 \end{pmatrix} \to \lambda_k = -0.3,\ 1 \to v(k) = c_1(-0.3)^kS_1 + c_2S_2.$

Varje lösning är begränsad och det finns lösningar som inte närmar sig noll. $\boxed{\text{neutralt stabilt}}$

Ex 4: $A = \begin{pmatrix} 0.3 & 0.5 \\ 0.6 & 0.4 \end{pmatrix} \to \lambda_k = -0.2,\ 0.9 \to v(k) = c_1(-0.2)^kS_1 + c_2(0.9)^kS_2.$

Varje lösning närmar sig noll för $k \to +\infty$. $\boxed{\text{stabilt}}$

Ex 5: $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \to x_2(k) = c_2,\ x_1(k) = c_1 + c_2k.$ $\boxed{\text{instabilt}}$

System med insignal (tvungna system), $\quad \dot{x} = Ax + f(t). \qquad (T)$

Definition: Systemet (T) kallas **insignalstabilt** om varje begränsad insignal $f(t)$ ger begränsade tillståndsvariabler x.

Sats 4.4 Alla lösningar till systemet (T) kan skrivas som $x(t) = x_H(t) + x_P(t)$, där x_H är den allmänna lösningen till den homogena ekvationen och x_P är en partikulär lösning.
Bevis: $\frac{d}{dt}(x_H + x_P) = A(x_H + x_P) + f$ och $\frac{d}{dt}(x - x_P) = A(x - x_P)$. $\Box$

Sats 4.5 (a) Om $\dot{x} = Ax$ är stabilt och f är begränsad då $t \geq t_0$, så är varje lösning till (T) begränsad då $t \geq t_0$.
(b) Om systemet är neutralt eller instabilt, så finns begränsade f som ger obegränsade lösningar x (fallet instabilt är enklast: redan $f = 0$ duger).
Bevis för (a) ges senare. Bevis för (b) följer av övn 4.6 och 4.7.

Övn 4.6: Visa att $x_P = te^{\lambda t}z$ är en lösning till $\dot{x} = Ax + e^{\lambda t}z$, där $z \neq 0$ och $Az = \lambda z$. Derivera x_P och konstatera att den är en lösning: $\dot{x}_P = e^{\lambda t}z + \lambda x_P = e^{\lambda t}z + Ax_P$.

Övn 4.7: Om A är neutralt stabilt, så finns ett egenvärde $\lambda = i\omega$ med egenvektor z. Enligt **4.6** ger den begränsade insignalen $f = e^{i\omega t}z$ den obegränsade lösningen $x_P = tf$.

Fråga: $\boxed{\text{Om insignalen är av typen } e^{st},\ s \in \mathbb{C}\text{, när är } x(t) \text{ av samma typ?}}$

Ex 6: $\dot{x} + 2x = e^{at}$, $a \neq -2$. Låt $x_P = Ke^{at}$. Därmed är $\dot{x}_P + 2x_P = (a+2)x_P = e^{at}$, dvs $(a+2)K = 1$ och $\boxed{x(t) = ce^{-2t} + \frac{1}{a+2}e^{at}}$.

Ex 7: Lös $\dot{x} = Ax + \begin{pmatrix} 4 \\ 3 \end{pmatrix} e^{2t}$; $\quad A = \begin{pmatrix} -4 & -3 \\ -2 & -1 \end{pmatrix}$: $\quad \lambda_i = \{-5, -1\}$, $S = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$.
$x_H = c_1e^{-5t}\begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix} + c_2e^{-5t}\begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix}$. Sätt $x_P = Ke^{2t}$ i ekvationen och lös: $\boxed{K = (2I - A)^{-1}\begin{pmatrix} 4 \\ 3 \end{pmatrix}}$.

Sats 4.6 Om $f(t) = e^{st}f$ och s är inte ett egenvärde av A, så har systemet (T) den partikulära lösningen $x_P = (sI - A)^{-1}fe^{st}$. Om s år imaginärt kallas lösningen **stationärt**.
Sats 4.6 bis Om r är inte ett egenvärde av A, så har systemet $v(k+1) = Av(k) + fr^k$ den partikulära lösningen $v_P = (rI - A)^{-1}fr^k$.

Definition: Matrisen $(rI - A)^{-1}$ kallas **resolventen** för matrisen A.

Ex 8: Lös $v(k+1) = Av(k) + fr^k$ med $r = 2$, A och f som i **Ex 7**. $x = x_H + x_P$. Homogen lösning som i **Ex 4**, partikulär lösning som i **Sats 4.6 bis**:
$x(k) = c_1(-5)^k\begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix} + c_2(-1)^k\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} + \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}2^k$. $\quad \boxed{\text{Läs avsn 4.7.}}$

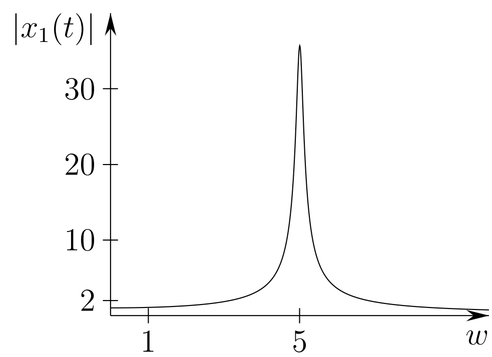
Resonans

Ex 9: $\dot{x} = Ax + \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} e^{i\omega t}$; $\quad A = \begin{pmatrix} -0.1 & -5 \\ 5 & -0.1 \end{pmatrix}$,

$\lambda_{1,2} = -0.1 \pm 5i$. $\quad x_P(t) = (i\omega I - A)^{-1}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} e^{i\omega t}$, dvs

$$x_P(t) = \frac{1}{\det(i\omega I - A)}\begin{pmatrix} 0.1 + i\omega & -5 \\ 5 & 0.1 + i\omega \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} e^{i\omega t}.$$

Därmed $x_P(t) = \frac{e^{i\omega t}}{25 + (0.1 + i\omega)^2}\begin{pmatrix} i\omega - 4.9 \\ i\omega + 5.1 \end{pmatrix}$, se bild.



Träna upp förmågan att invertera matriser, läs avsnitt **4.6**.