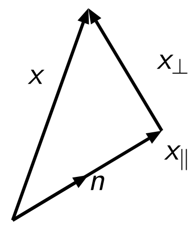
Sammanfattning 18

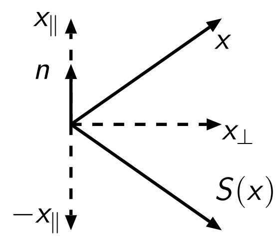
Linjär algebra – Symmetriska matriser
Vi beskriver n–dimensionella vektorer med kolonnmatriser och skalärprodukten som $\mathbf{x} \cdot \mathbf{y} = x^T y = x_1 y_1 + \cdots + x_n y_n$. Speciellt blir $|\mathbf{x}| = \sqrt{x^T x}$.

Definition x är vinkelrät mot y om $x^T y = 0$. Vi skriver $x \perp y$.

Sats (Pythagoras): $x \perp y \Rightarrow |x+y|^2 = |x|^2 + |y|^2$. **Bevis**: $|x+y|^2 = (x+y)^T(x+y) = |x|^2 + |y|^2 + x^T y + y^T x = |x|^2 + |y|^2$.



Ex. 1 Projektioner:
Given en enhetsvektor n, dvs $n^T n = 1$, kan alla (icke-noll) vektorer entydigt delas upp i två komposanter, $x = x_{\|} + x_{\perp}$, där $x_{\|} = kn$. Bestäm k. **Lösning**:
$0 = n^T x_{\perp} = n^T(x - x_{\|}) = n^T x - k n^T n$, dvs $\boxed{k = n^T x}$.
Avbildningen $x \to P(x) = x_{\|}$ kallas **projektion** på n. För varje x gäller att $P(x) = nn^T x$, dvs $\boxed{P = nn^T}$.
$P^2 = P$ ty $P^2 = nn^T nn^T = nn^T = P$.
P har egenvärden 0 och 1 ty $P(x_{\perp}) = P(x - P(x)) = P(x) - P(x) = 0$ och $P(n) = n$.



Ex. 2 Spegling:
$S(x) = x_{\perp} - x_{\|} = x - 2x_{\|} = x - 2P(x)$, dvs
$S = I - 2P = I - 2nn^T$.
$S^2 = (I-2P)(I-2P) = I - 2P - 2P + 4P^2 = I$, dvs
S är sin egen invers.
Sats: $S = S^T$.
Bevis: $S^T = (I - 2nn^T)^T = I - 2(n^T)^T n^T = S$.

Definition: Matrisen Q är ortogonal om $Q^T Q = I$, dvs $Q^{-1} = Q^T$.

Ex. 3: S är ortogonal ty $SS = I = S^T S$.

Sats: Låt q_i, $i = 1, \cdots, n$ vara kolonnerna i en ortogonal matris, dvs $Q = (q_1, q_2, \cdots, q_n)$. (a) Kolonnerna i Q motsvarar ortonormerade vektorer. (b) I kan skrivas som en summa av ortogonala projektioner längs enhetsvektorerna q_i.
Bevis: (a) $Q^T Q = I$, dvs $q_i^T q_i = 1$ och $q_i^T q_j = 0$ för $i \neq j$. (b) $QQ^T = q_1 q_1^T + q_2 q_2^T + \cdots + q_n q_n^T = I$, där $q_i q_i^T q_i q_i^T = q_i q_i^T$ och $q_i q_i^T q_j q_j^T = 0$, för $i \neq j$.

Ex. 4: Är $A = \begin{pmatrix} 2 & -2 & 1 \\ 1 & 2 & 2 \\ 2 & 1 & -2 \end{pmatrix}$ ortogonal? **Svar**: Nej ty $q_i^T q_i = 9$, nen $Q = \dfrac{1}{3}A$ är det.

Sats 6.9: A reell och symmetrisk samt $Az = \lambda z$, $z \neq 0 \Rightarrow \lambda \in \mathbb{R}$. **Bevis**: $Az = \lambda z \Rightarrow \overline{A}\overline{z} = \overline{\lambda}\overline{z} = A\overline{z}$. Därmed $z^T A \overline{z} = \overline{\lambda} z^T \overline{z}$. Också $(Az)^T \overline{z} = z^T A^T \overline{z} = z^T A \overline{z} = \lambda z^T \overline{z}$. Eftersom $z^T \overline{z} = |z|^2 \neq 0$, så är $\overline{\lambda} = \lambda$. Notera att eftersom A och λ är reella, så kan egenvektorn z väljas reell.

Sats 6.10: Om A är reell och symmetrisk så är alla reella egenvektorer tillhörande olika egenvärden ortogonala. **Bevis**: Ta $\lambda \neq \mu$ och $Az = \lambda z$, $Av = \mu v$. Så är $\mu z^T v = z^T A v = (A^T z)^T v = (Az)^T v = \lambda z^T v$. $\lambda \neq \mu \Rightarrow z^T v = 0$.

Sats 6.11 (Spektralsatsen): Om A är reell och symmetrisk så finns det en ortogonalmatris Q som diagonaliserar A, dvs $Q^{-1}AQ = Q^T AQ = D$. Beviset är lättast om alla egenvärden är olika. I så fall är A diagonaliserbar och S är ortogonal pga **Sats 6.10**. Omvänt så innebär det att $\boxed{A = QDQ^T = \lambda_1 q_1 q_1^T + \lambda_2 q_2 q_2^T + \cdots + \lambda_n q_n q_n^T}$.

Ex. 5: Finn Q som diagonaliserar $A = \begin{pmatrix} 1 & -4 & 8 \\ -4 & 7 & 4 \\ 8 & 4 & 1 \end{pmatrix}$.

Lösning: $\det(\lambda I - A) = (\lambda - 9)^2(\lambda + 9)$, dvs egenvärden är $\lambda_1 = \lambda_2 = 9$, $\lambda_3 = -9$. Ur $(9I - A)z = 0$ fås $2z_1 + z_2 - 2z_3 = 0$. Två egenvektorer ligger i denna plan och den tredje ligger längs normalen pga **Sats 6.10**, dvs $q_3 = \frac{1}{3}(1, 1, -2)^T$. Alla vektorer i planet duger som egenvektorer, vi väljer $q_1 = \frac{1}{3}(1, 2, 2)^T$ och därmed blir $q_2 = q_3 \times q_1 = \frac{1}{3}(2, -2, 1)^T$.

Kvadratiska former

Definition: $f(x_1, x_2, \cdots, x_n) = a_{11}x_1^2 + a_{12}x_1x_2 + \cdots = \sum_{i,j=1}^{n} a_{ij} \underbrace{x_i x_j}_{\text{grad } 2}$.

Ex. 6: $f(x_1, x_2, x_3) = x_1^2 + 6x_1x_2 + 8x_2x_3 + 7x_3^2$ är en kvadratisk form, men inte $x_1^2 - x_2$.

$$f(x_1, x_2, x_3) = (x_1, x_2, x_3) \begin{pmatrix} 1 & 6 & 0 \\ 0 & 0 & 8 \\ 0 & 0 & 7 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = x^T A x = x^T \begin{pmatrix} 1 & 3 & 0 \\ 3 & 0 & 4 \\ 0 & 4 & 7 \end{pmatrix} x = x^T K x,$$

dvs kvadratiska former kan skrivas i matrisform, **entydigt** om matrisen är symmetrisk.

Definition: En kvadratisk form kallas (a) **Positiv definit** om $x^T K x > 0$ för alla $x \neq 0$, (b) **Positiv semidefinit** om $x^T K x \geq 0$ och likheten gäller för någon $x \neq 0$, (c) **Negativ definit**, (d) **Negativ semidefinit** på motsvarande sätt och (e) **Indefinit** om $x^T K x$ växlar tecken.

Ex. 7: Klassificera formen $f(x_1, x_2) = 10x_1^2 + -4x_1x_2 + 7x_2^2 = x^T \begin{pmatrix} 10 & -2 \\ -2 & 7 \end{pmatrix} x$.

Metod 1: Spektralsatsen. $\det(\lambda I - K) = (\lambda - 6)(\lambda - 11)$, $Q = \frac{1}{\sqrt{5}} \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}$ och $Q^T K Q = D = \begin{pmatrix} 6 & 0 \\ 0 & 11 \end{pmatrix}$. Det blir: $x^T K x = x^T Q Q^T K Q Q^T x = y^T D y$, där $y = Q^T x$ är nya koordinater i planet. I de nya koordinaterna är $f(y_1, y_2) = 6y_1^2 + 11y_2^2 \geq 0$ och $f = 0$ endast om $y_1 = 0 = y_2$ dvs endast om $x_1 = 0 = x_2$, ty $\det(Q) \neq 0$. Därmed är f positiv definit. Vi säger att Q *diagonaliserar* f.

Metod 2: Kvadratkomplettering. $f = 10(x_1^2 - \frac{2}{5}x_1x_2) + 7x_2^2 = 10((x_1 - \frac{1}{5}x_2)^2 - \frac{1}{25}x_2^2) + 7x_2^2$, dvs $f = 10(x_1 - \frac{1}{5}x_2)^2 + \frac{33}{5}x_2^2$. Vi har att $f \geq 0$ och att $f = 0$ endast om $x_2 = 0$ och $x_1 - \frac{1}{5}x_2 = 0$, dvs endast om $x_1 = 0 = x_2$. Därmed är f positiv definit.