Sammanfattning 16

Lösning av differentialekvationer via Laplacetransform:
$a_n y^{(n)} + \cdots + a_1 y' + a_0 y = f(t)$, $-\infty < t < \infty$ ger $(a_n s^{(n)} + \cdots + a_1 s + a_0)\mathcal{L}y = \mathcal{L}f$, dvs $\mathcal{L}y = \dfrac{\mathcal{L}f}{a_n s^{(n)} + \cdots + a_1 s + a_0}$. Konvergensstrimlan bestäms av de krav man får på lösningen y.

Ex 1: Bestäm en kausal lösning till $y' + y = \theta(t) - \theta(t-1)$, $-\infty < t < \infty$. **Lösning:** $(s+1)Y(s) = \dfrac{1-e^{-s}}{s}$, dvs $Y(s) = \dfrac{1-e^{-s}}{s(s+1)} = \dfrac{1}{s} - \dfrac{1}{s+1} - e^{-s}(\dfrac{1}{s} - \dfrac{1}{s+1})$; där $\sigma = \Re(s) > 0$ ty lösningen är kausal. Inverse Laplace, använd (26), (27) och (33):
$y(t) = \theta(t) - e^{-t}\theta(t) - \theta(t-1) + e^{-(t-1)}\theta(t-1)$.

Övn 14.24 Bestäm en begränsad lösning till $u^{(4)} + 4u = \delta'$. **Lösning:** $(s^4+4)U(s) = s$, dvs $U(s) = \dfrac{s}{s^4+4}$. U har poler i $s = \pm 1 \pm i$. Inverse Laplace via residykalkyl. Olika poler omringas beroende på om $x > 0$ eller $x < 0$:

$x > 0$: $u(x) = \displaystyle\sum_{s=-1\pm i} \text{Res}\frac{e^{sx}s}{s^4+4} = [\text{Regel } 4] = \frac{e^{(-1+i)x}}{4(-1+i)^2} + \frac{e^{(-1-i)x}}{4(-1-i)^2} = -\frac{1}{4}e^{-x}\sin x.$

$x < 0$: $u(x) = -\displaystyle\sum_{s=1\pm i} \text{Res}\frac{e^{sx}s}{s^4+4} = [\text{Regel } 4] = -\frac{e^{(1+i)x}}{4(1+i)^2} - \frac{e^{(1-i)x}}{4(1-i)^2} = -\frac{1}{4}e^{x}\sin x.$

dvs $u(x) = -\frac{1}{4}e^{-|x|}\sin x$.

Sats 14.12 (Faltningsatsen) Om f, g och $f \circledast g$ kan Laplacetransformeras, $\mathcal{L}(f \circledast g) = \mathcal{L}f \cdot \mathcal{L}g$. Beviset bygger på det nära sambandet Fourier – Laplace.

Sats 14.14 Låt $\mathcal{S}$ vara linjärt och tidsinvariant. Om $w(t) \xrightarrow{\mathcal{S}} y(t)$, så är $H(s) = \dfrac{\mathcal{L}y}{\mathcal{L}w}$.
Bevis: $y = h \circledast w \Rightarrow \mathcal{L}y = \mathcal{L}h \cdot \mathcal{L}w = H(s) \cdot \mathcal{L}w$.

Ex 2: $\mathcal{S}$ linjärt, tidsinvariant och kausalt: $y^{(4)} + y'' = w$. Bestäm $h(t)$ och $H(s)$. Är $\mathcal{S}$ stabilt? **Lösning:** $(s^4+s^2)Y(s) = W(s)$, dvs $H(s) = \dfrac{1}{s^4+s^2} = \dfrac{1}{s^2} - \dfrac{1}{1+s^2}$, $\sigma > 0$ ty $\mathcal{S}$ kausalt. Inverse Laplace ger $h(t) = (t - \sin t)\theta(t)$. Enl **Sats 9.1** är systemet inte stabilt ty $\int_{-\infty}^{\infty} |h(t)|dt = \infty$.

Övn 14.31 $\mathcal{S}$ linjärt, tidsinvariant och kausalt: $y^{(4)} + 4y = w'$. Bestäm $h(t)$, $H(s)$ och avgör om stabiliteten. **Lösning:** $(s^4+4)Y(s) = sW(s)$, dvs $H(s) = \dfrac{s}{s^4+4}$. Konvergens i högra halvplanet pga kausalitet. $h(t) = \displaystyle\sum_{\pm1\pm i} \text{Res}\frac{e^{st}s}{s^4+4} = \frac{1}{2}\sinh t\,\sin t\,\theta(t)$. Ej stabil.

Sats 14.17 $\mathcal{S}$ linjärt, tidsinvariant, kausalt och av *ändlig ordning* (dvs $H(s) = \dfrac{Q(s)}{P(s)}$ en rational funktion). $\mathcal{S}$ stabilt $\Leftrightarrow \begin{cases} \text{a)} & \text{grad}P \geq \text{grad}Q \\ \text{b)} & \text{Poler till } H(s) \text{ ligger i } \Re(s) < 0. \end{cases}$

Bevis: a) Utför divisionen: $H(s) = P_1(s) + \dfrac{Q_1(s)}{P(s)}$. Inverse transform av $P_1(s)$ ger

$h_1(t) = a_n\delta^{(n)} + \cdots + a_1\delta' + a_0\delta$. Om systemet är stabilt så måste $P_1(s)$ vara konstant. Annars, kan en begränsad insignal som $w(t) = \cos(t^2)$ ge obegränsade utsignaler som $w'(t) = -2t\sin(t^2)$. Omvänt gäller också.

b) Via partialbråk uppdelning kan $\dfrac{Q_1(s)}{P(s)}$ skrivas som en summa av bidrag av typen $\dfrac{c_n}{(s-a)^{n+1}}$, och inverse Laplace ger att $h(t)$ har bidrag av typen $c_n t^n e^{at}\theta(t)$. Systemet är stabilt om $\int |h| dt < \infty$, vilket kräver att $\Re(a) < 0$, och då ligger alla poler av $H(s)$ på $\Re(s) < 0$.

Ex 3: (a) I **Ex 2** är $H(s) = \dfrac{1}{s^2(1+s^2)}$ med poler i $s = 0,\ \pm i$. Systemet är inte stabilt.
(b) I **Övn 14.31** är $H(s) = \dfrac{s}{s^4+4}$, med poler i $s = \pm 1 \pm i$, systemet är inte stabilt.

Övn 14.35 $\mathcal{S}$ linjärt och tidsinvariant med stegsvar $\mathcal{S}\theta = (1-e^{-t})\theta(t)$. Insignalen $w(t)$ ger utsignalen $y(t) = e^{-t}\cos t\,\theta(t)$. Bestäm $w(t)$.
Lösning: $h(t) = \frac{d\mathcal{S}\theta}{dt} = e^{-t}\theta(t) + (1-e^{-t})\delta(t) = e^{-t}\theta(t)$. Dessutom gäller att $(e^{-t}\cos t)\theta(t) = (e^{-t}\theta(t)) \circledast w(t)$. Faltningsatsen ger $\mathcal{L}w = \dfrac{\mathcal{L}(e^{-t}\cos t\,\theta(t))}{\mathcal{L}(e^{-t}\theta(t))}$, dvs $\mathcal{L}w = \dfrac{s+1}{1+(s+1)^2}\cdot(s+1) = 1 - \dfrac{1}{1+(s+1)^2}$, med konvergens i högre halvplan. Inverse Laplace ger $w(t) = \delta - e^{-t}\sin t\,\theta(t)$.