Sammanfattning 15

Räkneregler för Laplacetransformationen. Se formelsamlingen, nr (25) – (29). Skalning, förskjutning, mult. med e^{at}, derivatan och mult. med polynom i t. Notera! Transformationen gäller under specifika villkor på $\Re(s)$. Vi bevisar några regler här.

Bevis (27): Ur $(\mathcal{L}f)(s) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-st} f(t)dt$, som gäller i strimlan $\alpha \leq \Re(s) \leq \beta$ fås

$$\mathcal{L}(e^{at}f) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-st}e^{at}f(t)dt = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-(s-a)t}f(t)dt = (\mathcal{L}f)(s-a), \text{ i strimlan } \alpha \leq \Re(s-a) \leq \beta.$$

Ex. 1: Ur $\theta(t) \xrightarrow{\mathcal{L}} \frac{1}{s}$, $\Re(s) > 0$ följer $e^{7t}\theta(t) \xrightarrow{\mathcal{L}} \frac{1}{s-7}$, $\Re(s) > 7$.

Ex. 2: $\cos t\theta(t) = \frac{1}{2}\left(e^{it} + e^{-it}\right)\theta(t) \xrightarrow{\mathcal{L}} \frac{1}{2}\left(\frac{1}{s-i} + \frac{1}{s+i}\right) = \frac{s}{s^2+1}$, $\Re(s) > 0$.

Bevis (25): Vid $\alpha \leq \Re(s) \leq \beta$ gäller $f(at) \xrightarrow{\mathcal{L}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-st}f(at)dt \underset{a>0}{\overset{u=at}{=}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{s}{a}u}f(u)\frac{1}{a}du$.

På motsvarande sätt: $\mathcal{L}(f(at)) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-st}f(at)dt \underset{a<0}{\overset{u=at}{=}} -\int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{s}{a}u}f(u)\frac{1}{a}du$, dvs

$f(at) \xrightarrow{\mathcal{L}} \frac{1}{|a|}(\mathcal{L}f)(\frac{s}{a})$, $\alpha \leq \Re(\frac{s}{a}) \leq \beta$.

Bevis (29): $(\mathcal{L}f)' = \frac{d}{ds}\int_{-\infty}^{\infty} e^{-st}f(t)dt = -\int_{-\infty}^{\infty} e^{-st}tf(t)dt = -\mathcal{L}(tf(t))$.

Sats 14.5: Om konvergensstrimlan för $\mathcal{L}(f)$ innehåller den imaginära axeln, $\mathcal{L}(f) = \hat{f}(\frac{s}{i})$, givet att den är analytisk.

Ex. 3: $\mathcal{L}(e^{-t^2}) = (\mathcal{F}e^{-t^2})(\frac{s}{i}) = \sqrt{\pi}e^{-(s/i)^2/4} = \sqrt{\pi}e^{s^2/4}$. Konvergent för alla $s \in \mathbb{C}$.

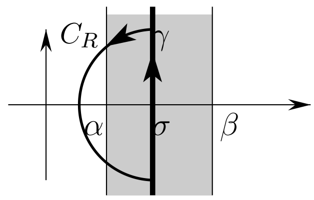
Övn 14.9: $f(t) = \sin t(\theta(t) - \theta(t-2\pi))$. Beräkna $\mathcal{L}(f)$.

(a) Direkt: $\mathcal{L}(f) = \int_0^{2\pi} e^{-st}\sin t dt = \frac{1}{2i}\int_0^{2\pi} e^{-st}\left(e^{it} - e^{-it}\right)dt = \frac{1-e^{-2\pi s}}{1+s^2}$. Singulariteter?

(b) Formelblad (36) och (26): $f(t) = \sin t\theta(t) - \sin(t-2\pi)\theta(t-2\pi)$ och

$\mathcal{L}(f) = \frac{1}{1+s^2} - \frac{e^{-2\pi s}}{1+s^2}$, dvs samma. Notera att $\mathcal{L}(f)$ är egentligen analytisk.

Laplace inversionsformel: $(\mathcal{L}f)(\sigma+i\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-i\omega t}(e^{-\sigma t}f(t))dt = \mathcal{F}(e^{-\sigma t}f(t))(\omega)$. Invers Fourier: $e^{-\sigma t}f(t) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} e^{i\omega t}(\mathcal{L}f)(\sigma+i\omega)d\omega$, dvs $f(t) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} e^{(\sigma+i\omega)t}(\mathcal{L}f)(\sigma+i\omega)d\omega =$ $\frac{1}{2\pi i}\int_{\sigma-i\infty}^{\sigma+i\infty} e^{st}(\mathcal{L}f)(s)ds$. Alla σ i konvergensstrimlan duger.



Sats 14.11: Om $(\mathcal{L}f)(s) = \frac{Q(s)}{P(s)}$, där Q och P är polynom med grad $P >$ grad Q, och om σ tillhör konvergensstrimlan, så är

$$f(t) = \begin{cases} \sum_{\Re(s)<\sigma} \operatorname{Res}(e^{st}(\mathcal{L}f)(s)), & \text{om } t > 0 \\ -\sum_{\Re(s)>\sigma} \operatorname{Res}(e^{st}(\mathcal{L}f)(s)), & \text{om } t < 0. \end{cases}$$

Bevis: Låt $t > 0$. Målet är att integrera $e^{st}(\mathcal{L}f)(s)$ längs kurvan $\gamma : \sigma+i\omega$, $-\infty < \omega < \infty$. Vi integrerar i stället över ett slutet område, där γ löps för $-R < \omega < R$ (vi kallar linjesticket för γ_R) och området sluts över en klokt valt halvcirkel med radie R (se bild). Residysatsen säger: $\frac{1}{2\pi i}\int_{\gamma_R} e^{st}(\mathcal{L}f)(s)ds + \frac{1}{2\pi i}\int_{C_R} e^{st}(\mathcal{L}f)(s)ds = \sum_{\Re(s)<\sigma} \operatorname{Res}(e^{st}(\mathcal{L}f)(s))$.

Om den andra integralen går mot noll då $R \to \infty$ (se Jordans lemma, Funktionsteori) så är satsen bevisad. Motsvarande gäller för $t < 0$ om C_R sluts till höger om γ_R.

Ex. 4: Beräkna $\mathcal{L}^{-1}(\frac{4}{4-s^2})$, $-2 < \Re(s) < 2$. Alt 1: Funktionen har poler i $s = \pm 2$. Vi väljer $\sigma = 0$, innanför konvergensstrimlan. $t > 0$: $f(t) = \operatorname*{Res}_{s=-2}(\frac{4e^{st}}{4-s^2}) = e^{-2t}$ (använd t ex Regel 4). $t < 0$: $f(t) = -\operatorname*{Res}_{s=2}(\frac{4e^{st}}{4-s^2}) = e^{2t}$, dvs $\boxed{f(t) = e^{-2|t|}}$. Alt 2: Eftersom $(\mathcal{L}f)(s) = \frac{1}{s+2} - \frac{1}{s-2}$, fås via formelsamlingen nr (33) och (34) samma svar.

Definition: Om U är en sådan distribution att $e^{-\sigma t}U$ är Fouriertransformerbar i strimlan $\alpha < \sigma < \beta$, så definieras, för $s = \sigma + i\omega$, $(\mathcal{L}U)(s) = \mathcal{F}(e^{-\sigma t}U)(\omega)$.

Ex. 5: $U = \delta \Rightarrow e^{-\sigma t}U = e^{-\sigma t}\delta = \delta$. Därmed $\mathcal{L}(\delta) = \mathcal{F}(\delta) = 1$.

Via räknereglerna fås: $\delta' \xrightarrow{\mathcal{L}} s$ och $\delta^{(n)} \xrightarrow{\mathcal{L}} s^n$. Därmed är $a_0\delta + a_1\delta' + \cdots + a_n\delta^{(n)} \xrightarrow{\mathcal{L}} a_0 + a_1 s + \cdots a_n s^n$, dvs ett polynom.

Ex. 6: $\theta(t) \xrightarrow{\mathcal{L}} \dfrac{1}{s}$, $\Re(s) > 0$,

$e^{at}\theta(t) \xrightarrow{\mathcal{L}} \dfrac{1}{s-a}$, $\Re(s-a) > 0$,

$te^{at}\theta(t) \xrightarrow{\mathcal{L}} -\dfrac{d}{ds}(\dfrac{1}{s-a}) = \dfrac{1}{(s-a)^2}$, $\Re(s-a) > 0$,

$t^k e^{at}\theta(t) \xrightarrow{\mathcal{L}} \dfrac{k!}{(s-a)^{k+1}}$, $\Re(s-a) > 0$,

Nu kan vi Laplaceinvertera vilka rationella funktioner som helst: $F(s) = \frac{R(s)}{P(s)} = P_1(s) + \frac{Q(s)}{P(s)}$. Första termen ger δ och dess derivator. Andra termen kan beräknas med t ex residykalkyl i polerna

1. $t > 0$ Polerna till vänster om definitionsstrimlan. $t < 0$: Omvänt.
2. f kausal: Definitionsstrimlan är ett högerhalvplan.
3. f integrerbar: Imaginära axeln ligger i definitionsstrimlans inre.
4. f begränsad: antingen ligger imaginära axeln i definitionsstrimlans inre, eller den är en rand av definitionsstrimlan, med enkla poler på axeln.
5. f kausal och integrerbar: Definitionsstrimlan innehåller $\Re(s) \geq 0$.

Ex. 7: Bestäm (a) en kausal lösning och (b) en integrerbar lösning till $y'(t) - y(t) = \delta(t)$.
$sY - Y = 1 \Leftrightarrow Y(s) = \dfrac{1}{s-1}$.
(a) $y(t)$ kausal $\Rightarrow Y(s)$ definierad i $\Re(s) > 1$, dvs $y(t) = e^t\theta(t)$.
(b) $y(t)$ integrerbar: se (3). $\Rightarrow Y(s)$ definierad i $\Re(s) < 1$, dvs $y(t) = e^t(\theta(t) - 1)$.

Övn 14.15: Finn en kausal funktion sådan att $F(s) = \dfrac{s}{s^3 + 5s^2 + 9s + 5} = \dfrac{s}{(s+1)((s+2)^2+1)}$.

Alt 1: **Sats 14.11**: $F(s)$ har poler i $s = -1,\ -2 \pm i$. Kurvan γ får ligga till höger om $\Re(s) = -1$. $f(t) = 0$ för $t < 0$ eftersom hela högra halvplanet är polfri.

$f(t > 0) = \operatorname*{Res}_{s=-1} e^{st}F(s) + \operatorname*{Res}_{s=-2+i} e^{st}F(s) + \operatorname*{Res}_{s=-2-i} e^{st}F(s) = -\dfrac{1}{2}e^{-t} + 2\Re(\operatorname*{Res}_{s=-2+i} e^{st}F(s))$.

Alt 2: Formelsamling! $F(s) = -\dfrac{1}{2}\dfrac{1}{s+1} + \dfrac{1}{2}\dfrac{s+2}{(s+2)^2+1} + \dfrac{3}{2}\dfrac{1}{(s+2)^2+1}$.

Svar: $y(t) = \dfrac{1}{2}\theta(t)\left(-e^{-t} + e^{-2t}(\cos t + 3\sin t)\right)$.