Sammanfattning 11

Definition: En följd $\{U_n\}$ av distributioner konvergerar i distributionsmening till U då $n \to \infty$ om för alla testfunktioner ϕ i $\mathcal{D}$, $< U_n, \phi > \underset{n\to\infty}{\to} < U, \phi >$.

Ex 1: $U_n = p_{\frac{1}{n}} \to \delta$ ty $\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} n(\theta(t) - \theta(t - \frac{1}{n}))\phi(t)dt = \int_0^{\frac{1}{n}} n\phi(t)dt \underset{n\to\infty}{\to} \phi(0)$.

Definition: $\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty} U_k$ konvergerar mot S om $S_n = \sum_{k=1}^{n} U_k \underset{n\to\infty}{\to} S$ i distributionsmening. Vi kan då för alla testfunktioner skriva $\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} S(t)\phi(t)dt = \sum_{k=1}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} U_k(t)\phi(t)dt$. Finessen är att derivatan av S kan alltid beräknas termvis: $< S', \phi >= - < S, \phi' >=$ $\displaystyle -\sum_{k=1}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} U_k(t)\phi'(t)dt = \sum_{k=1}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} U_k'(t)\phi(t)dt$, dvs $\displaystyle(\sum_{k=1}^{\infty} U_k)' = \sum_{k=1}^{\infty} U_k'$ (**Sats 11.7**, s 217).

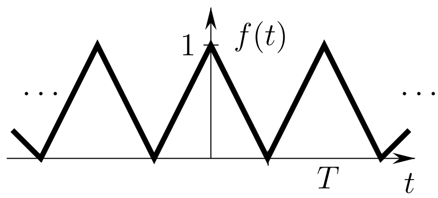
Definition: $T_a U$ är distributionen som har samma effekt som U på $T_{-a}\phi$: $< T_a U, \phi >=$ $\int_{-\infty}^{\infty} T_a U(t)\phi(t)dt \overset{\text{def}}{=} \int_{-\infty}^{\infty} U(t)T_{-a}\phi(t)dt = \int_{-\infty}^{\infty} U(t)\phi(t+a)dt =< U, T_{-a}\phi >$.

Definition: U är periodisk med period a om $T_a U = U$.

Ex 2: $U(t) = \displaystyle\sum_{k=-\infty}^{\infty} \delta(t-k)$ (Diracs kam eller Diracs staket) är periodisk med period 1.

Periodiska distributioner kan utvecklas i Fourier serier (detaljer sopade under mattan): $U(t) = \displaystyle\sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k e^{ik\Omega t}$, där $c_k = \displaystyle\frac{1}{T}\int_{period} U(t)e^{-ik\Omega t}dt$ och $\Omega T = 2\pi$. Termvis derivatan uppfyller $c_k(U') = ik\Omega c_k(U)$.

Övn 11.22: Derivera $f(t)$ 2 ggr. Notera: $f(t)$ har inga språng, $f'(t)$ är stickvis konstant, $f''(t)$ är ett pulståg.



$$f'(t) = \frac{2}{T}\sum_{k=-\infty}^{\infty} (-1)^{k+1}\left(\theta(t - \frac{kT}{2}) - \theta(t - \frac{(k+1)T}{2})\right)$$

$f''(t) = \displaystyle\frac{4}{T}\sum_{k=-\infty}^{\infty} (-1)^{k+1}\delta(t - \frac{kT}{2})$. Vi beräknar Fourierserien för f'':

$c_k(f'') = \displaystyle\frac{4}{T^2}\int_{-\frac{T}{4}}^{\frac{3T}{4}} \left(-\delta(t) + \delta(t - \frac{T}{2})\right) e^{-ik\frac{2\pi t}{T}}dt = \frac{4}{T^2}\left((-1)^k - 1\right)$. Via termvis derivation fås $c_k(f'') = i\frac{2k\pi}{T}c_k(f') = -(\frac{2k\pi}{T})^2 c_k(f)$. Dvs, $c_k(f) = \displaystyle\frac{1}{k^2\pi^2}(1-(-1)^k)$, $k \neq 0$, samt $c_0(f) = \frac{1}{T}\int_{period} f(t)dt = 1/2$. Slutligen, $\boxed{f(t) = \displaystyle\frac{1}{2} + \sum_{k\in\mathbb{Z},\ k\neq 0} \frac{1-(-1)^k}{k^2\pi^2} e^{ik\frac{2\pi t}{T}}}$.

Definition: $(\phi \circledast U)(t) = \int_{-\infty}^{\infty} \phi(t-\tau)U(\tau)d\tau, \qquad \phi \in \mathcal{D}$, U distribution.

Ex 3: $(\phi \circledast \delta)(t) = \displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} \phi(t-\tau)\delta(\tau)d\tau = \phi(t)$. Vi skriver $\phi \circledast \delta = \phi$.

Ex 4: $(\phi \circledast \delta')(t) = \displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} \phi(t-\tau)\delta'(\tau)d\tau = \int_{-\infty}^{\infty} \phi'(t-\tau)\delta(\tau)d\tau = \phi'(t) = \frac{d}{dt}(\phi \circledast \delta)$.

Ex 5: Beräkna $\delta' \circledast (e^{2t}\theta(t))$: $\delta' \circledast f = \delta \circledast f' = f' = 2e^{2t}\theta(t) + \delta(t)$.

Faltning av distributioner $U \circledast V$ är definierad (a) Om någon har kompakt stöd, eller (b) om bägge är kausala (då är också $U \circledast V$ kausal).

Sats 11.8 $U \circledast V = V \circledast U$ (1)

$$U \circledast (V+W) = U \circledast V + U \circledast W \tag{2}$$

$$U \circledast (V \circledast W) = (U \circledast V) \circledast W \text{ Om alla är kausala eller } \geq 2 \text{ har kompakt stöd} \tag{3}$$

$$\delta \circledast U = U \tag{4}$$

$$\frac{d}{dt}(U \circledast V) = U' \circledast V = U \circledast V'. \tag{5}$$

Övn 11.33: (a) Lös $u'' = -\delta(x-y)$, $0 < x < 1$, $u(0) = 0 = u(1)$ (en impuls på y).
$u'(x) = -\theta(x-y) + A$ och $u(x) = -(x-y)\theta(x-y) + Ax + B$. Randvillkor: $B = 0$, $A = 1 - y$ (ty $y < 1$). Dvs, impulssvaret blir $u(x) = (1-y)x + (x-y)\theta(x-y) \equiv k(x,y)$.
(b) Allmän belastning, $u(x) = \int_0^1 k(x,y)f(y)dy = x\int_0^1 (1-y)f(y)dy + \int_0^x (y-x)f(y)dy$.
(c)$u'' = -f$ måste kontrolleras: Derivation under integraltecken.

$\boxed{\text{Studera avsn 11.9. Se lösningen till 11.30 på kursens anslagstavla}}$.

Kap.12: Frekvensanalys
Definition: $w = u + iv \Rightarrow \mathcal{S}w = \mathcal{S}u + i\mathcal{S}v$.
Definition: $\mathcal{S}$ är **reellt** om w reellt $\Rightarrow \mathcal{S}w$ reellt.
Låt $w(t) = e^{st}$, $s \in \mathbb{C}$. $S(e^{st}) = h \circledast e^{st} = e^{st} \circledast h = \int_{-\infty}^{\infty} e^{s(t-\tau)}h(\tau)d\tau = e^{st}\int_{-\infty}^{\infty} e^{-s\tau}h(\tau)d\tau$.
Definition: Överföringsfunktion $\boxed{H(s) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-s\tau}h(\tau)d\tau}$, dvs $\boxed{H(s) = \mathcal{S}(e^{st})/e^{st}}$.
Specialfall: $s = i\omega$: $\boxed{H(i\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-i\omega\tau}h(\tau)d\tau}$, frekvensfunktion.
Ex 6: Lågpassfilter. $h(t) = \frac{1}{RC}e^{-t/RC}\theta(t)$ och $w(t) = e^{st}$.
$S(e^{st}) = \frac{e^{st}}{1+RCs}$, givet $\Re(sRC) > -1$, så att den integralen är meningsful och denhomogena lösningen kan försummas för stor t. Det blir $H(s) = \dfrac{1}{1+sRC}$.

Sats 12.2 Ett linjärt tidsinvariant system $y^{(n)} + a_{n-1}y^{(n-1)} + \cdots + a_0 y = b_m w^{(m)} + \cdots + b_0 w$ har överföringsfunktionen $H(s) = \dfrac{b_m s^m + \cdots + b_0}{s^n + \cdots + a_1 s + a_0}$ (**Bevis**: För insignalen $w(t) = e^{st}$ sök en partikulär lösning av typen $y = K(s)e^{st}$).
Sats 12.3 Systemet $\begin{cases} \dot{\mathsf{x}} &= \mathsf{A}\mathsf{x} + \mathsf{B}\mathsf{w} \\ \mathsf{y} &= \mathsf{C}\mathsf{x} + \mathsf{D}\mathsf{w} \end{cases}$ har överföringsfunkt. $H(s) = \mathsf{C}(s\mathsf{I} - \mathsf{A})^{-1}\mathsf{B} + \mathsf{D}$.
Bevis:För insignalen $\mathsf{w} = we^{st}$ sök en partikulär lösning av typen $\mathsf{x} = xe^{st}$ och $\mathsf{y} = ye^{st}$.

Definition: Amplitudfunktion och fasfunktion: $H(i\omega) = A(\omega)e^{i\varphi(\omega)}$.
Polära formen av ett komplext tal: För $a > 0$ så är $z = a + ib = \sqrt{a^2+b^2}e^{i\arg z}$, $\arg z = \arctan b/a$. Notera att arctan har värden i $[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$; för $a < 0$ finns det motsvarande samband, kolla själv grafiskt!

Ex 7: Lågpassfilter. $H(s) = \dfrac{1}{1+RCs} \Rightarrow H(i\omega) = \dfrac{1}{1+iRC\omega}$. Därmed $A(\omega) = \dfrac{1}{\sqrt{1+(RC\omega)^2}}$ och $\varphi(\omega) = -\arctan RC\omega$.

Ex 8: För ett reellt system $\mathcal{S}$, gäller det att $\mathcal{S}(\cos\omega t) = \mathcal{S}(\Re(e^{i\omega t})) = \Re(\mathcal{S}(e^{i\omega t})) = \Re(e^{i\omega t}H(i\omega)) = \Re(A(\omega)e^{i(\omega t+\varphi(\omega))}) = A(\omega)\cos(\omega t + \varphi(\omega))$. Analogt gäller för insignalen $\sin\omega t$.

$$\xrightarrow[\cos\omega t]{} \boxed{\;\mathcal{S}\;} \xrightarrow[A(\omega)\cos(\omega t+\varphi(\omega))]{}$$

Läs **Sats 12.4**, sid 235.