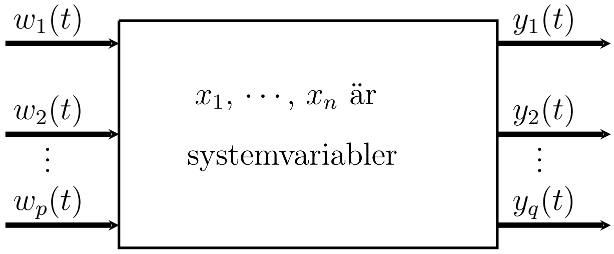
Sammanfattning 1

Exempel på linjära system:



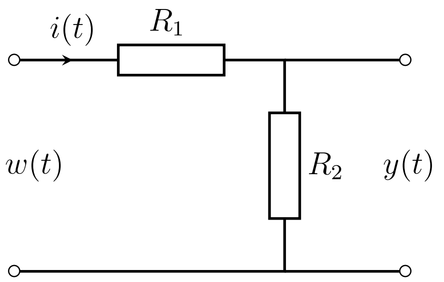
Tänk på en TV-apparat: w är antennsignalen, x är interna spänningar mm i tv:s kretsar, y är ljud och bildsignal.

Exempel 1.1 (sid 5): Elektriska kretsar

$$w - iR_1 - iR_2 = 0.$$

$$y = iR_2.$$

$$y(t) = \frac{R_2}{R_1 + R_2} w(t).$$



Exempel 1.2: Högpassfilter

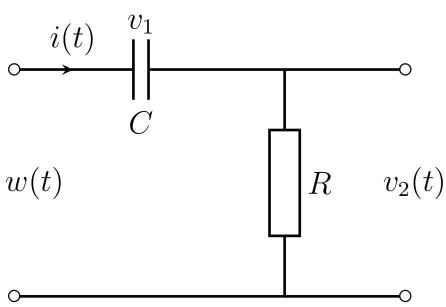
$$w - v_1 - v_2 = 0.$$

$$C\frac{dv_1}{dt} = i.$$

$$v_2 = iR.$$

Derivera första ekvationen och lös för v_2:

$$\boxed{\frac{dv_2}{dt} + \frac{1}{RC} v_2 = \frac{dw}{dt}.}$$



$$\begin{aligned}
& e^{\frac{t}{RC}} \frac{dv_2}{dt} + e^{\frac{t}{RC}} \frac{1}{RC} v_2 = \frac{d}{dt}(e^{\frac{t}{RC}} v_2) = e^{\frac{t}{RC}} \frac{dw}{dt} \\
\Rightarrow \quad & e^{\frac{t}{RC}} v_2(t) - e^{\frac{t_0}{RC}} v_2(t_0) = \int_{t_0}^{t} e^{\frac{\tau}{RC}} w'(\tau) d\tau \\
\Rightarrow \quad & v_2(t) = e^{-\frac{t-t_0}{RC}} v_2(t_0) + \int_{t_0}^{t} e^{-\frac{t-\tau}{RC}} w'(\tau) d\tau.
\end{aligned}$$

Då $RC = 1$, $t_0 = 0$, $v_2(0) = 0$ och $w(t) = \sin \omega t$, så är
$v_2(t) = \frac{w}{w^2+1} \cos \omega t + \frac{w^2}{w^2+1} \sin \omega t - \frac{w}{w^2+1} e^{-t}.$
Därmed namnet *högpassfilter*. Gå igenom exemplet *lågpassfilter* på sid 5.

Exempel 1.3: Tidsdiskreta system
Huslån: Man lånar M kr från banken och betalar tillbaka z kr varje år. z (konstant) skall räcka till räntan för året och amortering. $M_{n+1} = M_n - (z - rM_n)$, dvs:

$$\boxed{M_{n+1} = (1+r)M_n - z; \quad M_0 = M.} \qquad \text{(Jfr övn } \mathbf{E.2}\text{).}$$

Läs *Tidsdiskreta exempel* på tillägsmaterialet, sid 1–3.

Tidskontinuerliga och tidsdiskreta linjära system

I denna kurs antas tillståndsvariablerna x uppfylla ett system av ordinära differentialekvationer eller differensekvationer.
Låt w, x och y vara (tidsberoende) kolonnmatriser. Sambandet mellan insignalerna w och utsignalerna y i ett tidskontinuerligt lineärt system regleras av de lineära tillståndsekvationerna

$$\begin{cases} \frac{d\mathsf{x}}{dt} &= \mathsf{A}\mathsf{x} + \mathsf{B}\mathsf{w} \\ \mathsf{y} &= \mathsf{C}\mathsf{x} + \mathsf{D}\mathsf{w} \end{cases}$$

Låt $\mathsf{w}(k), \mathsf{x}(k)$ och $\mathsf{y}(k)$ vara kolonnmatriser. Sambandet mellan insignalerna $\mathsf{w}(k)$ och utsignalerna $\mathsf{y}(k)$ i ett tidsdiskret lineärt system regleras av de lineära tillståndsekvationerna

$$\begin{cases} \mathsf{x}(k+1) &= \mathsf{A}\mathsf{x}(k) + \mathsf{B}\mathsf{w}(k) \\ \mathsf{y}(k) &= \mathsf{C}\mathsf{x}(k) + \mathsf{D}\mathsf{w}(k) \end{cases}$$

Matrisen A kallas *systemmatrisen.*
Om systemet inte är linjärt, kan det ibland approximeras med ett relaterat linjärt system. Detta kallas *linearisering.* Läs om det på sid 12–18.

Övning 1.6: Solsystemet

$$\mathsf{F} = m\mathsf{a} = \frac{k}{|\mathsf{x}|^2}\frac{\mathsf{x}}{|\mathsf{x}|}.$$

$$\mathsf{a} = \frac{d\mathsf{v}}{dt}, \quad \mathsf{v} = \frac{d\mathsf{x}}{dt}, \quad \mathsf{x} = (x_1, x_2).$$

Övning 2.5: Oscillator

$$m\frac{d^2\mathsf{x}}{dt^2} = -k\mathsf{x} + \mathsf{w}(t). \quad \text{Därmed}$$

$$\begin{pmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -\frac{k}{m} & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ \frac{1}{m} \end{pmatrix} \mathsf{w}(t).$$