LUNDS TEKNISKA HÖGSKOLA
MATEMATIK

Inlämningsuppgifter omgång 1
PROJEKTIV GEOMETRI
2015-01-21

Uppgifterna skall lämnas in senast den 11 februari.
I vissa uppgifter används heltal $a_1 \dots a_{10}$ med $0 \leq a_k \leq 9$ som lämpligen bör variera från person till person. Talen $a_1 \dots a_{10}$ kan till exempel vara siffrorna i ditt personnummer. Ange i inledningen till dina inlämnade uppgifter vilka tal du valt.

Följande avsnitt från kursen i Linjär algebra är nödvändiga att behärska. (Obs exemplen nedan är inte inlämningsuppgifter. Sidhänvisningarna är till Sparrs lärobok i Linjär algebra)

- Linjer i $\mathbb{R}^3$. Ex 5 s 49.
- Skärning mellan linjer i $\mathbb{R}^3$. Ex 6 s 49.
- Plan i $\mathbb{R}^3$. Ex 10 s 54.
- Skärning mellan linje och plan i $\mathbb{R}^3$. Ex 12 s 56.
- Skärning mellan plan i $\mathbb{R}^3$. Ex 13 s 57.
- Ekvationssystem. Sats 3 s 59.
- Vinkeln mellan två vektorer. Ex 9 s 74.

1. Bestäm skärningspunkten (om det finns någon) mellan linjen

$$(x,y,z) = (a_1,a_2,a_3) + t(a_3,a_4,a_5)$$

och planet

$$a_6x + a_7y + a_8z = a_9.$$

Observera att talen a_k är beskrivna i inledningen.

2. Bestäm eventuella skärningspunkter mellan linjerna

a)

$$\begin{cases} (x,y,z) = (a_2,a_3,a_4) + t(2a_2 - a_4, 2a_3 - a_5, 2a_4 - a_6) \\ (x,y,z) = (a_4,a_5,a_6) + t(a_2 + 3a_4, a_3 + 3a_5, a_4 + 3a_6) \end{cases}$$

b)

$$\begin{cases} (x,y,z) = (a_1,a_2,a_3) + t(a_7,a_7,a_9) \\ (x,y,z) = (a_4,a_5,a_6) + t(a_1,a_2,a_3) \end{cases}$$

Vänd!

3. En kamera har objektivet i punkten $(0,0,1)$. Bildplanet har ekvationen $ax+by=-\sqrt{a^2+b^2}$, $(a,b)\neq(0,0)$, vilket bland annat betyder att bildplanet är parallellt med z-axeln och har avståndet 1 till origo. Kameran avbildar räta linjer i xy-planet på räta linjer i bildplanet. Se nedanstående skiss.

a) Låt $a\neq 0$. Visa att alla räta linjer i xy-planet som är parallella med x-axeln avbildas på linjer som alla går genom punkten $\left(-\dfrac{\sqrt{a^2+b^2}}{a},\ 0,\ 1\right)$.

b) Beräkna vinkeln mellan bilderna av de parallella linjerna

$$(x,y,z)=(0,a_5+1,0)+t(1,0,0) \quad \text{och} \quad (x,y,z)=(0,a_7+2,0)+t(1,0,0),$$

då konstanterna a och b i bildplanets ekvation är a_4+1 respektive a_6+1. Ge svaret i exakt form med hjälp av arcusfunktioner. Ge också ett närmevärde.