LUNDS TEKNISKA HÖGSKOLA
MATEMATIK

TENTAMENSSKRIVNING
Tillämpad matematik, Testtenta.
2009-0-0

1. a) Eftersom K är symmetrisk är $a = 0, b = 9$. För att K ska vara neutralt stabil måste $\max \Re(\lambda_i) = 0$. Låt $\Re(\lambda_j) = 0$. Eftersom matrisen är symmetrisk (och alla egenvärde är reella) är $\lambda_j = 0$ och determinanten är också lika med 0. Då har vi:

$$|K| = \begin{vmatrix} -1 & 2 & 0 & 0 \\ 2 & -7 & 9 & 0 \\ 0 & 9 & -28 & 4 \\ 0 & 0 & 4 & c \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -1 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & -3 & 9 & 0 \\ 0 & 9 & -28 & 4 \\ 0 & 0 & 4 & c \end{vmatrix} =$$

$$\begin{vmatrix} -1 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & -3 & 9 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 4 \\ 0 & 0 & 4 & c \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -1 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & -3 & 9 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & c+16 \end{vmatrix} = 0.$$

Alltså är $c + 16 = 0$ och $c = -16$.
Svar: $a = 0, b = 9, c = -16$.

b) **Svar:** $f(x) = -x_1^2 + 4x_1x_2 - 7x_2^2 + 18x_2x_3 - 28x_3^2 + 8x_3x_4 - 16x_4^2$. Formen är inte negativt definit eftersom ett av egenvärdena är lika med 0.

c) Vi transformerar $K - (-2)I$:

$$K + 2I = \begin{pmatrix} +1 & 2 & 0 & 0 \\ 2 & -5 & 9 & 0 \\ 0 & 9 & -26 & 4 \\ 0 & 0 & 4 & -14 \end{pmatrix} \longrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & -9 & 9 & 0 \\ 0 & 9 & -26 & 4 \\ 0 & 0 & 4 & -14 \end{pmatrix} \longrightarrow$$

(vi redan fick $d_1 = +1, d_2 = -9$.)

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 9 & -26 & 4 \\ 0 & 0 & 4 & -14 \end{pmatrix} \longrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -17 & 4 \\ 0 & 0 & 4 & -14 \end{pmatrix} \longrightarrow$$

(vi fick $d_3 = -17$)

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -4/17 \\ 0 & 0 & 4 & -14 \end{pmatrix} \longrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -4/17 \\ 0 & 0 & 0 & -14 + 16/17 \end{pmatrix}.$$

Vi ser att $d_4 < 0$ och vi har alltså 3 negativa egenvärde för $K - (-2)I$.
Svar: K har tre egenvärde som är mindre än -2.

2. Vi börjar med $g(t) = |t| = 2t\theta(t) - t$. Vi har

$$g'(t) = 2\theta(t) + 2t\delta(t) - 1 = 2\theta(t) - 1 \Rightarrow g''(t) = 2\delta(t).$$

Eftersom $f(t) = g(t) + g(t-1)$ har vi:

$$f'(t) = g'(t) + g'(t-1) = 2\theta(t) - 1 + (2\theta(t-1) - 1) = 2\theta(t) + 2\theta(t-1) - 2 \Rightarrow$$

$$f''(t) = 2\delta(t) + 2\delta(t-1) \Rightarrow f(t) * f''(t) = 2(f(t) * \delta(t) + f(t) * \delta(t-1)) =$$

$$2(f(t) + f(t-1)) = 2(|t| + |t-1| + (|t-1| + |t-2|)) = 2|t| + 4|t-1| + 2|t-2|.$$

3. a) $B(0) = I$ vilket ger

$$\frac{1}{c}(e^0 + 8) = 1 \Rightarrow c = 9.$$

Svar: $c = 9$.

b) Genom att studera $e^{\lambda t}$ som ingår i matrisen ser vi att möjliga egenvärde för λ är $\lambda = 9$ och $\lambda = 0$. Ett av dem måste vara ett dubbelegenvärde. I alla fall är determinanten (som deras produkt) lika med 0. För att bestämma spåret använder vi att $B'(0) = A$. Genom derivera och summera talen på diagonalen får vi

$$\frac{1}{9}\left(9e^{9t} + 3 \cdot 9e^{9t} + 5 \cdot 9e^{9t}\right)$$

vilket ger för $t = 0$ att spåret är lika med 9 (det är alltså 0 som är ett dubbelegenvärde).

Svar: $\det A = 0, \operatorname{tr} A = 9$.

c)

$$X = e^{A(t-2)}X(2) = B(t-2)X(2) =$$

$$\frac{1}{9}\begin{bmatrix} e^{9t-18}+8 & e^{9t-18}-1 & e^{9t-18}-1 \\ 3e^{9t-18}-3 & 6+3e^{9t-18} & 3e^{9t-18}-3 \\ 5e^{9t-18}-5 & 5e^{9t-18}-5 & 5e^{9t-18}+4 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 2 \\ 0 \\ 2 \end{bmatrix} = \frac{1}{9}\begin{bmatrix} 4e^{9t-18}+14 \\ 12e^{9t-18}-12 \\ 20e^{9t-18}-2 \end{bmatrix}.$$

d)

$$\left(B(2)^{-1}\right)^2 = \left(e^{-2A}\right)^2 =$$

$$e^{-4A} = B(-4) = \frac{1}{9}\begin{bmatrix} e^{-36}+8 & e^{-36}-1 & e^{-36}-1 \\ 3e^{-36}-3 & 6+3e^{-36} & 3e^{-36}-3 \\ 5e^{-36}-5 & 5e^{-36}-5 & 5e^{-36}+4 \end{bmatrix}.$$

4.

a) se bocken!

b) **Svar:** Om A är $n \times n$ matris, så är $\det A = \lambda_1 \cdot \lambda_2 \cdot \ldots \cdot \lambda_n$.

c) Till exempel, $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ På sedvanligt sätt bestämmer vi egenvärdena $\lambda_1 = \lambda_2 = 0$. Egenvektorerna beräknas till $t[1,0]^T, t \neq 0$ och det finns inte två linjärt oberoende egenvektorer vilket betyder att vi inte kan välja bas bestående av egenvektorer och matrisen inte kan diagnoliseras.

d) Vi har $a \cdot (-5) + 5 \cdot 3 = 0 \Rightarrow a = 3$. Dessutom är $3^2 + 5^2 = (-5)^2 + 3^2 = 34$, vilket kraver $b^2 = 34 \Leftrightarrow b = \pm\sqrt{34}$.

Svar: $a = 3, b \pm \sqrt{34}$**.**

e) **Svar:** Nej, eftersom $(1, -1, 0)$ ger ett negativt värde.

5. a) Eftersom impulssvaret är derivatan av stegsvaret har vi:

$$h(t) = (1 - e^{-3t})'\theta(t) + (1 - e^{-3t})\delta(t) = 3e^{-3t}\theta(t) \Rightarrow H(s) = \frac{3}{s+3}.$$

Svar: Impulssvaret är $h(t) = 3e^{-3t}\theta(t)$. Överföringsfunktionen är $H(s) = \frac{3}{s+3}$.

b) Systemet är stabilt därför att

$$\int_{-\infty}^{\infty} |h(t)|\, dt = \int_0^{\infty} 3e^{-3t}\, dt = 1 < \infty.$$

c) Eftersom $y_1(t) = \mathbf{R}e(e^{2it})$, har vi

$$\mathcal{S}y_1(t) = \mathbf{R}e\left(\mathcal{S}e^{2it}\right) = \mathbf{R}e\left(\frac{3}{2i+3}e^{2it}\right) = \mathbf{R}e\left(\frac{3(3-2i)}{13}(\cos 2t + i\sin 2t)\right) = \frac{3}{13}(2\sin 2t + 3\cos 2t).$$

Eftersom $\mathcal{L}y_2(t) = \frac{s}{s^2+4}$ är

$$\mathcal{S}y_2(t) = \mathcal{L}^{-1}(H(s)\mathcal{L}y_2(t)) = \mathcal{L}^{-1}\left(\frac{3s}{(s+3)(s^2+4)}\right) =$$

$$\mathcal{L}^{-1}\left(\frac{1}{13}\left(-\frac{9}{s+3} + \frac{12}{s^2+4} + \frac{9s}{s^2+4}\right)\right) = \frac{3}{13}(-3e^{-3t} + 2\sin 2t + 3\cos 2t)\theta(t).$$

Svar: $\mathcal{S}y_1(t) = \frac{1}{13}(6\sin 2t + 9\cos 2t)$ och $\mathcal{S}y_2(t) = \frac{1}{13}(-9e^{-3t} + 6\sin 2t + 9\cos 2t)\theta(t)$.

6. Låt $x = t, y = \tau$. Om vi multiplicerar ekvationen med $\theta(t)$ kan den omskrivas som

$$f(t)\theta(t) + \cos 2t\theta = \sin 2t\theta(t) * f(t)\theta(t).$$

Då får vi

$$F(s) + \frac{s}{s^2+4} = F(s) \cdot \frac{2}{s^2+4} \Rightarrow F(s) = -\frac{s}{s^2+2} \Rightarrow f(t)\theta(t) = -\cos\sqrt{2}t\theta(t).$$

Svar: Till exempel, $-\cos\sqrt{2}x$.