LUNDS TEKNISKA HÖGSKOLA
MATEMATIK

TENTAMENSSKRIVNING
Linjär analiys för D. Lösningar.
2012-3-09

1. a) $(e^{-t}\theta(t))' = (e^{-t})'\,\theta(t) + e^{-t}(\theta(t))' = -e^{-t}\theta(t) + e^{-t}\delta(t) = \delta(t) - e^{-t}\theta(t)$.

b) Eftersom $F(t) = -e^{-t}$ är en primitiv till e^{-t} har vi att $(F(t) - F(0))\theta(t)$ är en primitiv till $f(t)$ och svaret är $(1 - e^{-t})\theta(t) + C$.

c) $f(t)*\theta(t-1) = \mathcal{L}^{-1}\left(\mathcal{L}e^{-t}\theta(t)\cdot\mathcal{L}\theta(t-1)\right) = \mathcal{L}^{-1}\left(\frac{1}{s+1}\cdot\frac{e^{-s}}{s}\right) = \mathcal{L}^{-1}\left(e^{-s}\left(\frac{1}{s(s+1)}\right)\right)$.
Eftersom $\mathcal{L}^{-1}\left(\frac{1}{s(s+1)}\right) = \mathcal{L}^{-1}\left(\frac{1}{s} - \frac{1}{s+1}\right) = \theta(t) - e^{-t}\theta(t) = (1 - e^{-t})\theta(t)$ är svaret $(1 - e^{-(t-1)})\theta(t-1) = (1 - e^{1-t})\theta(t-1)$.

d) Om $X = \mathcal{L}f$ har vi $s^2X + sX = \frac{1}{s+1} \Rightarrow$

$$X = \frac{1}{s(s+1)^2} = \frac{1}{s} - \frac{1}{s+1} - \frac{1}{(s+1)^2} \Rightarrow x = \left(1 - e^{-t} - te^{-t}\right)\theta(t).$$

2. a) $H(s) = \frac{2}{2+s} \Rightarrow h(t) = 2e^{-2t}\theta(t)$.

b) $\mathcal{S}(C_1w_1(t) + C_2w_2(t)) = C_1\mathcal{S}w_1(t) + C_2\mathcal{S}w_2(t)$ för varje insignal $w_i(t)$ och tal C_i

c) Nej, eftersom $\theta(t)$ är kausal, men $\theta(t+1)$ är inte.

d) Vi har $\lambda_1 + \lambda_2 = \operatorname{tr} A = 3 + a = 0 \Rightarrow a = -3$.

e) $\sin t * \delta'(t) = (\sin t)' = \cos t$.

3. a) $a = 1$ på grund av symmetri. Semidefinit matris måste ha en av egenvärdena lika med 0 och determinanten är lika med 0 vilket ger $b = 1$.

b) Ett av egenvärdena är lika med 0, den andra är lika med $\operatorname{tr} A - 0 = 2$. Egenvektorerna för $\lambda_1 = 0$ är $t\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}, t \neq 0$. För att har längden 1 väljer vi $t = \frac{1}{\sqrt{2}}$. På samma sätt väljer vi vektorn $\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ för $\lambda_2 = 2$ och tillsammans bildar de en ortogonal matris

$$S = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$$

som diagonalierar A.

c) $X(t) = \begin{pmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{pmatrix} = C_1e^{0\cdot t}\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} + C_2e^{2t}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} C_1 + C_2e^{2t} \\ -C_1 + C_2e^{2t} \end{pmatrix}$.

4. a) $h(t) = (\mathcal{S}\theta(t))' = \delta(t) - e^{-t}\theta(t)$ enligt problem 1. Då är $H(s) = \mathcal{L}^{-1}(h(t)) = 1 - \frac{1}{s+1} = \frac{s}{s+1}$.

b) Systemet är stabilt därför att polerna i $H(s)$ är negativa och dessutom är $\deg s \leq \deg(s+1)$.

c) Eftersom $\mathcal{L}w_1(t) = \frac{s}{s^2+1}$ är

$$y_1(t) = \mathcal{L}^{-1}(H(s)\mathcal{L}w_1(t)) = \mathcal{L}^{-1}\left(\frac{s^2}{(s+1)(s^2+1)}\right) = \mathcal{L}^{-1}\frac{1}{2}\left(\frac{1}{s+1} + \frac{s}{s^2+1} - \frac{1}{s^2+1}\right) =$$

$$\frac{1}{2}\left(e^{-t} + \cos t - \sin t\right)\theta(t).$$

d) Eftersom $\mathcal{L}y_2(t) = \frac{1}{s}$ är

$$w_2(t) = \mathcal{L}^{-1}(\frac{1}{H(s)}\mathcal{L}y_2(t)) = \mathcal{L}^{-1}\left(\frac{s+1}{s^2}\right) = \theta(t) + t\theta(t).$$

5. a) Eftersom $\cos 2t = \frac{e^{i2t}+e^{-2it}}{2}$ är egenvärdena $2i, -2i$ och 1 kända. Eftersom $t^k e^t$ med $k > 0$ finns i B är A inte diagonaliserbar, vilket betyder också ett dubbelegenvärde 1. På grund av storlelk är det alla möjliga egenvärdena ock storleken är lika med 4.

b) Matrisen är inveretebar eftersom alla egenvärdena är skilda från 0.

c) Matrisen är inte symmeterisk eftersom det finns komplexa egenvärden.

d) För $t = 0$ har vi värdet 1 vilket betyder att element ligger på diagonalen och $i = j = 4$.

6. a) $f(t) = f(t)\theta(t)$ på grund av kausalitet. Därför är $f(t-2) = f(t-2)\theta(t-2)$ och $f(t-2)\theta(t) = f(t-2)\theta(t-2)\theta(t) = f(t-2)\theta(t-2)$ eftersom $\theta(t)\theta(t-2) = \theta(t-2)$.

b) För positiva $\tau < 2$ är $f(\tau - 2) = 0$ på grund av kausalitet. Detta betyder att integralen till vänster är lika med 0 för alla positiva $t < 2$. Däremot $t^3 > 0$ vilket visar att sådan kausal funktion inte exsiterar.

Alternativ lösning var att multiplicera med $\theta(t)$, använda kasualitet och punkt a) för att få $f(t) * f(t-2) = t^3\theta(t)$. Detta ger ekvationen $e^{-2s}F(s)^2 = \frac{6}{s^4} \Rightarrow F(s) = \pm\frac{e^s\sqrt{6}}{s^2}$ och $f(t) = \pm\sqrt{6}(t+1)\theta(t+1)$. Men resultatet är inte kausalt.