Tillämpad matematik. Lineära system.

LAB2

25.02, 13.00-15.00 MH:140
26.02, 13.00-15.00 MH:230, 231
27.02, 13.15-15.15 MH:230
28.02, 10.00-12.00 MH:230

Tillämpad matematik. Lineära system.

LAB2

Datörövning är en modifierad datörövning till kursen "System och transfom", utvecklad av S.Spanne och J.Gustavsson

Inledning

Programmet för denna datorövning är studium av insignal-utsignalrelationer, dels i tidsområdet, dels i frekvensområdet samt en kort introduktion till matris hantering i Matlab och Maple. Dessutom betrakatar vi system av differentialekvationer. **Ha läroboken, övningshäftet och utdelad tabell tillgängliga.** Tag också med din Matlabhandledning (om du har sådan).

Förbered dig genom att titta igenom denna handledning och anvisningarna nedan. Läs igenom kapitel 7, speciellt definitionerna av linearitet, tidsinvarians och kausalitet samt systembeskrivning med impulssvar. Läs också om frekvens- och amplitudfunktioner.

System på insignal-utsignalform

Vi skall experimentellt undersöka system på insignal-utsignalform med hjälp av Matlab. I några uppgift kommer dock Maple att användas.

2.1 En del behövliga färdigskrivna filer finns att hämta på kursens hemsida:
http://www.maths.lth.se/matematiklth/personal/ufn/TM/index.html
Hämta dessa filer till någon lämplig egen Matlabkatalog.

Allmänt

Vi skall använda ett paket Matlabfiler för att kunna räkna med funktioner (in-och utsignaler) och system. Detta paket är specialskrivet för övningen och har många begränsningar. Matlab kan endast göra tidsdiskreta räkningar, så att de tidskontinuerliga systemen approximeras genom sampling. Vidare kan Matlab ej visa upp hela tidsaxeln utan signalerna skärs av utanför ett visst tidsintervall ($-10 \leq t \leq 10$). I paketet representeras funktioner (signaler) med Matlabföljder (radvektorer) och system med Matlabfunktioner (m-filer). Titta gärna på de m-filer ni kör, med kommandot `type`, och försök förstå hur de fungerar.

2.2 Starta Matlab och initiera övningspaketet med kommandot `startlab2`. Med `whos` får du reda på vilka variabler du har och hur stora de är. Rita upp funktionen `theta` med `plot(t,theta)` och gör motsvarande med `delta` (oändligheten är här tydligen ungefär 13).

Du kan själv definiera nya funktioner som passar in i systemet. Stegfunktionen är t ex tillverkad med ($t > 0$). En kausalt avskuren sinusfunktion fås med `sin (t).*(t>0)` etc.

2.3 Definiera för framtida bruk några funktioner, en kausal rektangelpuls, en triangelpuls och en kausal cosinusfunktion:

```
krekt = (t>0)-(t>1);
triangel = (t+1).*(t>-1)-2*t.*(t>0)+(t-1).*(t>1);
kcos = cos(t).*(t>0);
```

Rita upp funktionerna med `plot`.

Matlabtips: Du kommer snart att få upp många figurfönster från Matlab. När du har fått för många så går det lätt att sudda t ex alla fönster utom de två sista, med kommandot `delete(1:gcf-2)` (`gcf` = get handle to current figure = numret på aktuellt figurfönster).

System

Ett system (i insignal-utsignalform) **S** representeras med en Matlabfunktion, t ex definierad i `syst1.m`. Om insignalen finns t ex i Matlabföljden `theta` så beräknas utsignalföljden `y` genom `y=syst1(theta)`.

2.4 Genom filen `lpfilter.m` simuleras lågpassfiltret i kursboken (exempel 7.3 sidan 81) (med $R = 1$ och $C = 1$). Bestäm stegsvaret för filtret med kommandot

```
y=lpfilter(theta);
```

och rita upp det med `plot(t,y)`.

För att förenkla för övaren finns i paketet en Matlabfunktion `plotsyst` som ritar upp insignalen och utsignalen. Se nästa uppgift.

2.5 Prova kommandot

```
plotsyst('lpfilter',theta);
```

Observera att kommandot tar systemnamnet som en *sträng,* alltså omgivet av `' '`.

2.6 Filen `bil.m` innehåller en realisering av den enhjuliga bilen. Matematisk beskrivning ges av ekvationen

$$y'' + 2y' + 2y = 2f' + 2f,$$

där $f(t)$ beskriver väg och $y(t)$ bilens lodrät position (jämför med övning 7.16!).

Testa vad som händer om den kör på en trottoarkant (beskriven med en stegfunktion):

```
plotsyst ('bil',theta);
```

2.7 Filen `brygga.m` innehåller en realisering av en bryggnät, som matematiskt beskrivs med ekvationen:

$$RCy' + y = w - RCw'.$$

Rita stegsvaret:

```
plotsyst('brygga',theta);
```

Tror du att det är enkelt att t ex för hand ställa in insignalen så att utsignalen antar ett önskat värde?

Svar:..

Speciella system

I paketet finns några färdiga praktiskt viktiga speciella system.

- fördröjning: en fördröjning tiden a ($\mathbf{S} : f(t) \to f(t-a)$) fås med

  `utsignal=delay(insignal,a);`

- derivation: $\mathbf{S} : f(t) \to f'(t)$ fås med

  `utsignal=differentiator(insignal);`

- integration: $\mathbf{S} : f(t) \to \int_{-\infty}^{t} f(\tau)d\tau$ fås med

  `utsignal=integrator(insignal);`

I paketet kan man även fördröja signaler med kommandot `delay`.

2.8 Titta till exempel på

```
plot(t,delay(triangel,2));
```

Byt sedan 2 mot -3.

Gör sedan om fördröjningarna ovan med `triangel` bytt mot `kcos.`

Vid fördröjningen skiftas in nollor från det förflutna (eller framtiden, om fördröjningen inte är kausal). Detta är en ofullkomlighet som vi skulle kunna undvika om det fanns oändligt mycket minne i datorn. Då skulle hela funktionen kunna lagras och inte bara ett ändligt delintervall.

Prova nu att derivera några enkla funktioner.

2.9 Derivera triangelpulsen, rektangelpulsen, stegfunktionen, deltafunktionen och den avskurna cosinusen.

```
plotsyst('differentiator',triangel);
plotsyst('differentiator',krekt);
```

osv. Lägg märke till spikarna i en del av derivatorna. Hur kan man representera dem matematiskt?

Svar:..

Egenskaper hos system

De fyra viktigaste speciella egenskaperna hos system på insignal-utsignalform är *linearitet, tidsinvarians, kausalitet och stabilitet.* Vi skall nu experimentellt undersöka vilka av våra system som har de tre första av dessa egenskaper. Stabiliteten är svårare att se med vårt system, eftersom den talar om vad som sker då $t \to \infty$, och det får dåligt plats på skärmen.

Linearitet

Ett system **S** kallas ju lineärt om

$$\mathbf{S}(c_1 w_1(t) + c_2 w_2(t)) = c_1 \mathbf{S} w_1(t) + c_2 \mathbf{S} w_2(t)$$

för alla tal c_1, c_2 och alla insignaler $w_1(t), w_2(t)$. Funktionen `lintest` testar detta genom att beräkna och rita upp

$$\mathbf{S}(c_1 w_1(t) + c_2 w_2(t)) - c_1 \mathbf{S} w_1(t) - c_2 \mathbf{S} w_2(t).$$

Det är dock enklare att kontrollera i Maple.

2.10 Stäng inte av Matlab utan starta parallellt Maple. Hämta filen `testlin.mws` från kursens hemsida. Öppna filen i Maple. Kör filen kommandovis genom att placera markören på en Maplerad i taget och sedan trycka på return-knappen. Använd resultaten för att avgöra vilka av systemen beskrivna i filen som är lineära.

2.11 Åter till Matlab! Undersök om `lpfilter` kan vara lineärt genom att stoppa in olika kombinationer av insignaler. Börja t ex med

```
lintest('lpfilter',triangel,kcos,-3,4)
```

Lägg märke till skalan i den undre figuren. Verkar systemet vara lineärt?

Svar:...

Anm: Man kan givetvis inte testa alla tänkbara insignaler, men det brukar märkas snabbt om ett system inte är lineärt.

Tidsinvarians

Ett system är tidsinvariant om fördröjningar av insignalen medför motsvarande fördröjningar av utsignalen men inga andra förändringar av denna. Detta är lätt att testa i vårt system.

2.12 Använd `plotsyst` på systemet `lpfilter` och insignalen `triangel`. Förskjut sedan insignalen åt höger, t ex $a = 2$, och åt vänster, t ex $a = 3$ och jämför utsignalerna:

```
plotsyst('lpfilter',triangel);
plotsyst('lpfilter',delay(triangel,2));
plotsyst('lpfilter',delay(triangel,-3));
```

Det finns även här en funktion som underlättar testen, `delaytest`.

2.13

```
delaytest('lpfilter',triangel, 2);
delaytest('lpfilter',triangel,-3);
```

Lägg märke till skalan i den undre figuren.

I vissa fall kan testet störas av nollorna som skiftas in från höger eller vänster. Bortse därför från eventuella störningar i början eller slutet.

Kausalitet

Om för varje a gäller insignalen $w(t) = 0$ då $t < a \Longrightarrow$ utsignalen $y(t) = 0$ då $t < a$ så är systemet *kausalt* - om det är lineärt. För olineära system måste man använda lärobokens definition. Se läroboken!

2.14 Undersök om systemet `lpfilter` är kausalt genom att sända in några triangelpulser med olika fördröjningar. Titta noga på skalorna! Kausalt?

Svar:. . . . .

Ett enklare kriterium för kausalitet, som kan användas då systemet är lineärt och tidsinvariant, är att impulssvaret är en kausal funktion.

Undersökning av system

2.15 Undersök om systemen syst1-6 är lineära, tidsinvarianta och kausala. Fyll i följande tabell:

system	lineärt	tidsinvariant	kausalt
syst1			
syst2			
syst3			
syst4			
syst5			
syst6			

För de system, som är lineära och tidsinvarianta, kan kausaliteten testas med en enda insignal. Vilken?

Svar:. . . . .

De andra kräver lite mer omsorg. Se efter vad System 3 gör med en puls `krekt` och med steget `theta`.

Impulssvar

Impulssvaret $h(t) = \mathbf{S}\delta(t)$ till ett lineärt tidsinvariant system fås som utsignalen då insignalen är deltafunktionen. Då impulssvaret är känt kan sedan utsignalen beräknas med faltning.

2.16 Bestäm impulssvaren till de lineära och tidsinvarianta systemen i tabellen ovan. Testa sedan att det blir rätt genom att beräkna någon eller några utsignaler med faltning. Gör så här (där t ex `syst1` och `triangel` kan bytas mot andra system respektive insignal):

```
h = syst1(delta);
y = falt(h,triangel);
plotsyst('syst1',triangel);
figure
subplot(211)
plot(t,y);
```

och jämför. Om du flyttar på det nyaste fönstret så kan du se båda samtidigt.

Amplitudfunktioner

För de lineära och tidsinvarianta av våra system är överförings- och frekvens-funktion definierade. Frekvensfunktionens absolutbelopp $A(\omega) = |H(i\omega)|$ beskriver ju amplitudförstärkningen vid vinkelfrekvensen ω. Vi skall testa detta. Skriptet `amplitudf` beräknar amplitudfunktionen $A(\omega)$ om impulssvaret $h(t)$ är givet. $H(i\omega)$ är ju Fouriertransformen av $h(t)$. Se sats 7.8 i kursboken. Den bakomliggande metoden är FFT (snabb Fouriertransformation).

2.17 Beräkna amplitudfunktionen för systemen `lpfilter` och `bil`. Börja med att sända in cosinus- eller sinussignaler med vinkelfrekvenser 1, 2, 3 och 6, t ex

```
plotsyst('bil',sin(3*t));.
```

1. Uppskatta i den erhållna figuren hur stor amplitudförstärkningen är (insignalens amplitud bör vara 1 så utsignalens amplitud är lika med förstärkningen). Fyll i tabellen

System	Vinkelfrekvens	Amplitudförstärkning
lpfilter	1	
	2	
	3	
	6	
bil	1	
	2	
	3	
	6	

2. Jämför det erhållna värdet med motsvarande punkt på kurvan för amplitudfunktionen. Skriv
`amplitudf(lpfilter(delta));` respektive `amplitudf(bil(delta));`

Matriser i Matlab och Maple

I nästa uppgift ska vi bl.a. bestämma egenvärden och egenvektorer till en given matris med hjälp av Matlab och Maple. Först betraktar vi har matas matriser i Matlab och Maple.

Matlab: Matriser matas in radvis med mellanslag mellan elementen, semikolon mellan raderna och med hakparentes omkring. Exempelvis ger `A=[1 2;4 3]` matrisen i uppgift 8.3a. Om man vill ha dess egenvärden och en uppsättning egenvektorer, skriver man `[S,D]=eig(A)`. Egenvektorerna kommer som kolonner i **S**, och egenvärdena kommer i diagonalen i **D**.

Maple: Starta Maple.

För att Maple ska kunna arbeta med matriser behövs först kommandot `with(linalg);`. Matrisen i uppgift 8.3a matas in genom kommandot `A:=matrix(2,2,[1,2,4,3]);`. (Den första tvåan anger antalet rader, den andra antalet kolonner.) Egenvärden och egenvektorer fås med kommandot `eigenvects(A);`. Om du har svårt att tolka Maples resultat, skriv `?eigenvects`.

Exponentialmatrisen $e^{t\mathbf{A}}$ fås genom kommandot `exponential(A*t);`.

Egenvärden och egenvektorer

Låt **A** vara matrisen i uppgift 8.10.

2.18 Bestäm alla egenvärden och en uppsättning egenvektorer till **A** med hjälp av Matlab.

Svar:...

2.19 Bestäm alla egenvärden och en uppsättning egenvektorer till **A** med hjälp av Maple.

2.20 Egenvektorerna ser inte likadana ut i Matlab och Maple. Kommentera olikheterna i utseende.

Svar:. . . . .

2.21 Beräkna determinanten $\det(e^{t\mathbf{A}})$ och spåret $\operatorname{tr} \mathbf{A}$ med hjälp av Maple. Ser du sambandet mellan dem? Gissa och testa för andra matriser.

Svar:. . . . .

Låt $\mathbf{B}$ vara matrisen i uppgift 8.16.

2.22 Beräkna $e^{t\mathbf{B}}$ med hjälp av Maple.

2.23 Använd föregående resultat för att avgöra om $\mathbf{B}$ är diagonaliserbar.

Svar:. . . . .

System av differentialekvationer

Mapletips: Kommandot som ska användas är `dsolve`.

2.24 Gör som i följande exempel.
Finn lösningen till systemet i uppgift 9.6. Gör så här:

```
ekvationer:={diff(u1(t),t)=u1(t)+2*u2(t)-2*exp(t),
diff(u2(t),t)=4*u1(t)+3*u2(t)-10*exp(t), u1(0)=6, u2(0)=0};
variabler:={u1(t),u2(t)};
dsolve(ekvationer,variabler);
```

Anmärkning: Om man vill rita upp lösningsfunktionerna, finns kommandot `DEplot` (dock inte tillgänglig i student version av Maple).

Betrakta tillståndsekvationerna

$$\begin{cases} x' &= -x - 5y + w_1(t) \\ y' &= x + y + w_2(t) \end{cases}$$

där w_1 och w_2 är insignalerna.

2.25 Lös med hjälp av Maple systemet ovan, om $w_1(t) = w_2(t) = \cos at$ och $x(0) = y(0) = 1$ $a = -1, -1.9, -1.99, -1.999$. Ser du resonans-mönstret? Testa också $a = -2$. Beräkna det karakteristiska polynomet och förklara varför är $a = -2$ så intressant.

Svar:. . . . .