Tillämpad matematik. Lineära system.

LAB1

18.02, 13.00-15.00 MH:140
19.02, 13.00-15.00 MH:230, 231
20.02, 13.15-15.15 MH:230
21.02, 10.00-12.00 MH:230

Tillämpad matematik. Lineära system.

LAB1

Datörövning är en modifierad datörövning till kursen "Linear Analys", utvecklad av S.Spanne

Inledning

Syftet med datorövningen

Övningens ändamål är att ge ett smakprov på hur ett datoralgebrasystem kan användas för att att lösa problem med summation samt med komplex räkning och differentialkalkyl. En del av innehållet kan ses som en repetition av kurserna i analys i en och flera variabler.

Maple är ett kraftfullt men därför också komplicerat program. Därför innehåller övningen ganska mycket förberedelser, innan du börjar lösa riktiga problem. Programmet för övningen innehåller många moment, och det kan vara svårt att hinna med allt. Gör du inte det, så försök att slutföra övningen på egen hand vid annat tillfälle.

Datoralgebrasystem

Ett modernt datoralgebrasystem har som huvudfunktion att genomföra symboliska beräkningar (i motsats till numeriska). Det kan utföra algebraiska manipulationer och förenklingar, lösa ekvationssystem, integrera och derivera symboliskt och lösa differentialekvationer. Dessutom kan de flesta sådana system också utföra numeriska beräkningar och har kraftfulla grafiska funktioner, även om numeriska uppgifter av stor omfattning bör överlämnas till på numerisk specialinriktade system som Matlab eller till specialskrivna program.

Maple är ett av de ledande datoralgebrasystemen. Några av de starkaste konkurrenterna är Mathematica, Macsyma och Reduce. LTH har en generell licens för Maple, och systemet bör därför finnas tillgängligt på alla institutioner och på skolans elevdatorer. Det kan köras på de flesta vanliga operativsystem. Den version vi använder på datorövningarna är Maple 11.

Universitetet har givit ut ett cdrom som studerande kan låna på UB2 för en depositionsavgift av 50 kr. På den finns Matlab och Maple för Windows och Macintosh.

Mapleversioner

Liksom de flesta stora programpaket uppgraderas Maple relativt ofta. Versionerna skiljer sig något åt, och anvisningarna nedan är gjorda för Maple 9.5 I denna och senaste versioner finns det en mängd nya finesser i användargränssnittet, men anvisningarna nedan försöker undvika dessa så långt det går. Det går därför bra att använda även äldre versioner, tom Maple 5 även om i några fall systemet inte beter sig exakt likadant.

Förberedelser

Läs igenom detta häfte, så att du får en uppfattning om vad som kommer att hända under övningen. Tag med läroboken, samt övningshäftet. Vi skall pröva Maple på en del exempel som du redan löst för hand. Titta i förväg på vilka frågor måste du svara på för att klara övningen: de är markerad som

Svar: ....
Här skriver du resultatet som du fick från Maple.

Introduktion till Maple

I denna övning skall vi närmast använda Maple som en oerhört kraftfull "räknedosa" för symboliska beräkningar. Beskrivningen nedan av hur man kan använda Maple är inte hela sanningen. Maple faktiskt har ett utveklat programmeringsspråk, som ger möjlighet att enkelt skappa och lösa svåra matematiska problem med hjälp av implementerade avancerade algoritmer. Maple kan hjälpa att skriva en matematisk text genom att producera LaTex fil med text, beräkningar och grafik. Mer information om Maple kan man finna i det inbyggda hjälpsystemet samt i ett större antal skrifter och böcker.

Kommandon och aritmetiska beräkningar

1.1 Starta Maple genom att dubbelklicka på ikonen i menuet. I Unix kan man också ge kommandot `maple -x` (på Matematiska institutionens maskiner `xmaple &`). I vissa fall får man dock online version utan Maplefönster, vilket är mindre bekvämt. Placera Maplefönstret, som strax kommer upp, på lämpligt ställe. Man går ur Maple genom att välja `Exit` i `File`-menyn.

I Maplefönstret hittar du en "prompt" `>`. Den betyder att Maple väntar på ett kommando. Ser man inte prompten betyder det att man har nyare version med så kallade tvådimensionel input. Det går utmärkt att jobba med det (man tom slipper att skriva semikolon efter varje kommandot), men det är mindre bekvämt att kopiera färdiga kommandona. För att få standart Maple input går man först till Options->View->Input och väljer "Maple Input". Sedan går man till Insert->Execution Group->Before Cursor och får prompten `>`.

Skriv in `2+3;` efter prompten och tryck på `Enter`.

Observera att varje kommando till Maple måste avslutas med ett semikolon `;`, innan dess händer ingenting. Detta gör att man kan slå in långa formler som inte får plats på en rad. Den som är van vid Pascal eller Simula känner på många punkter igen sig i Maple.

Maple kan också räkna med rationella tal (allmänna bråk).

1.2 Låt Maple räkna ut $1/3 + 1/6$. Beräkna också 2^{100} som i Maple skrivs `2^100` och 2^{-20} som skrivs `2^(-20)`. Se också efter vad 100! (i Maple `100!`) blir.

Faktorisera detta tal med kommandot `ifactor(100!);` (i står för "integer". Kommandot `factor` används för faktorisering av polynom).

Här kan man utnyttja att Maple tar fram det senast beräknade resultatet om man skriver `%` och i det här fallet går det alltså att i stället skriva `ifactor(%);`.

Hur många tvåor finns det i faktorisering av 100! ?

Svar:...

För att visa vad Maple (eller snarare dagens datorer) orkar med utan ansträngning så beräkna även `1000!`.

Hjälp

1.3 Maple har ett omfattande inbyggt hjälpsystem. Om man klickar på `Help` i menyraden, så får man tillgång till olika sorters hjälptexter. Försök att hitta hjälpen för kommandot `solve`. Man kan också få hjälp direkt från prompten `>` genom att ange ett sökord föregånget av ett frågetecken. Försök t ex att skriva `?plot` (här behövs ej `;`). I slutet på varje hjälptext finns bra exempel och hänvisningar till andra kommandon som kan vara av nytta. Exempel går att kopiera och modifiera.

Om du är van vid någon tidigare version av Maple så titta på `What's New` i hjälpmenyn. Där finns beskrivningar av skillnaderna mellan olika versioner.

Variabler

Maple kan inte bara räkna med tal utan också med variabler och med funktioner. Detta gör att ett Maplesystem blir större och ofta mer invecklat att programmera än ett vanligt programmeringsspråk, men också oerhört mycket mera kraftfullt.

1.4 Ge kommandot `(x+1)^3;`. Maple svarar med samma sak. Som svar på `expand(%);` så utvecklar Maple uttrycket (enligt binomialteoremet). Försök även med

```
expand((x+1)^3+(x-1)^3);
expand((a-b)*(a+b));
```

Maple gör vissa typer av förenklingar automatiskt, medan andra måste beställas med kommandot `simplify`. Det är ofta besvärligt att få Maple att skriva om ett uttryck på den form man önskar. Försök t ex med kommandona `simplify`, `expand` och `collect`. Även `normal` kan vara av nytta, och i vissa fall `factor`.

Tilldelningssatser

1.5 Man kan tilldela en variabel ett värde, numeriskt eller symboliskt. Tilldelningssymbolen är liksom i Pascal `:=`. Försök med `x:=2;`. Kommandot `x;` ger nu värdet av variabeln x. Ge också kommandot `(x+1)^2;`.

En variabel som fått ett värde behåller detta tills man går ur Maple eller ger den ett annat värde. För att helt ta bort värdet kan man använda kommandot `x:='x'`. Det är lätt att glömma bort att man gett en variabel ett värde tidigare, vilket kan leda till obegripliga resultat av räkningar.

1.6 Variabler kan förutom numeriska värden även ha Mapleuttryck som värden. Genom att ge tilldelningskommandot `f:=(x+1)^3;` så sätter vi f lika med $(x+1)^3$. (Blir svaret `27` så tag bort det tidigare värdet från `x` och försök igen.) Nu ger `expand(f);` ett utvecklat polynom, och vi kan få en annan form på `f` med `f:=expand(f);`. Försök även med `f^2` och `expand(f^2);`. Känner ni igen det senaste uttrycket?

Derivation och integration

Maple kan derivera och även bestämma primitiva funktioner, oftast bättre än de flesta matematiker.

1.7 Med `diff(f,x);` deriverar vi uttrycket $f = x^3 + 3x^2 + 3x + 1$ ovan, med `int(f,x);` finner vi en primitiv funktion (integrationskonstanten får vi själva lägga till).

Allmänt får man *intervallet* $a \leq x \leq b$ i Maple genom `a..b`. Detta har vissa likheter med Matlabs `a:b`, men fungerar både för diskreta och kontinuerliga variabler. En integral med gränser får vi genom att ange integrationsvariabelns gränser med `..` emellan, till exempel fås

$$\int_{-2}^{3} (x^3 + 3x^2 + 3x + 1)\, dx$$

genom `int(f,x=-2..3);`. Gränserna får gärna innehålla variabler, försök t ex med `int(f,x=-y..(z+1));`.

1.8 Repetera nu de enkla primitiva funktionerna från envariabelanalysen genom att integrera $\cos x$ (med kommandot `int(cos(x),x);`), $\sin y$, e^t (skrivet `exp(t)`), $\dfrac{1}{\cos^2 t}$, $\dfrac{1}{1+x^2}$ och $1/\sqrt{1-z^2}$ med avseende på respektive variabel. Kvadratrotsfunktionen kan t ex fås med `sqrt`.

Om det inte finns någon elementär primitiv funktion eller annan primitiv som Maple känner till, så svarar i regel Maple genom att ge tillbaka det man stoppat in, stiligt formaterat. Försök med `1/sqrt(1+x+x^5),x);` så får ni tillbaka

$$\int \frac{1}{\sqrt{1+x+x^5}}\, dx$$

Däremot klarar Maple i motsats till äldre versioner av `int(1/sqrt(1+x^4),x)`. Maple har också ett namn på den icke elementära primitiven `int(exp(-(x^2)),x);`, vilken är en viktig funktion t ex i sannolikhetskalkylen och teorin för diffusion.

Summation

Maple har också fått lära sig att beräkna en mängd summor. Syntaxen för summation är naturlig, $\sum_{k=m}^{n} a_k$ fås genom Maplekommandot `sum(a(k),k=m..n)`.

1.9 Beräkna potenssummorna

$$A_n = \sum_{k=0}^{n} k \text{ och } B_n = \sum_{k=0}^{n} k^3$$

med hjälp av kommandona `A:=sum(k,k=0..n)`, `B:=sum(k^3,k=0..n)`. Förenkla med `simplify` och `factor` och jämför dem. Vilket samband finns mellan summorna?

Svar:..

Maple är också ganska bra på teleskopsummor och kombinatorik.

1.10 Försök att beräkna $\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k(k+1)}$ med Maple.

Svar:..

Vad blir $\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k}$? Använd kommandot `binomial (n,k)` för att se det.

Svar:..

Enkel kurvritning

1.11 Med kommandot `plot` ritar man tvådimensionella figurer i Maple, t ex funktionskurvor. Ge kommandot

```
plot((x+1)^3,x=-4..3);
```

Antingen dyker det upp ett nytt fönster med en funktionsgraf eller också ritas grafen i det fönster du arbetar i. Man kan ställa om beteendet som du vill i menyn `Options:Plot Display` Om man klickar med högerknappen i bilden, så får man upp en meny där man kan välja t ex hur axlarna ritas.

Vi kan också återanvända gamla uttryck. Vad ger `plot(f,x=-3..3);`? Rita även upp några exponentialkurvor, logaritmkurvor och trigonometriska kurvor.

Funktioner i Maple

Funktioner

Maple kan hantera inte bara uttryck som ovan utan även *funktioner*. Dessa kan definieras på flera olika sätt. Det för våra ändamål enklaste påminner om beteckningen $x \mapsto f(x)$, vilken ju används i matematiken som synonym till $y = f(x)$.

1.12 Ge kommandot

```
f:= x-> exp(x)-sin(x);
```

Beräkna först $f(0)$, $f(1)$ och $f(2)$ genom att ge kommandona `f(0);`,`f(1);` och `f(2);`. Försök sedan med `f(a);` och `f(y+z);`.

1.13 Lägg här märke till en viktig skillnad. Om vi ger ett värde till f genom tilldelningen `f:=x^3-x;` så är värdet av `f` ett *uttryck* med variabeln `x` inbyggt. Gör detta och beräkna `diff(f,x);` respektive `diff(f,y);`.

Går det dock att beräkna f(2)? Vad ger `f(2);`? Hur tolkar du det? Det rätt sätt är en substitution:

```
subs(x=2, f);
```

Om vi i stället ger `f` ett värde genom `f:=x->x^3-x;` så är värdet en *funktion* och $f(2)$ ger väntade värdet. Försök nu med `diff(f(x),x);` och `diff(f(y),y);` samt `diff(f,x);`. Se även vad `diff(f,y)` nu ger för resultat.

Funktioner är mycket mer flexibla, men ibland något mer svårhanterliga än enkla uttryck.

Det finns lyckligtvis ett enkelt sätt att göra om ett uttryck till en funktion, nämligen genom att använda `unapply`.

1.14 Antag till exempel att vi vill ha en funktion som beräknar potenssumman $s_n^4 = \sum_{k=1}^{n} k^4$.

Det kan vi få genom

```
potsum4 := sum(k^4,k=1..n);
potsum4 := simplify(potsum4);
potsum4 := unapply(potsum4,n);
```

(Blir det protester, så beror det förmodligen på att variabeln `k` fått ett värde vid någon tidigare operation. Ge i så fall kommandot `k:='k';` för att ta bort detta värde.) Det går nu att skriva `potsum4(7)`, men vi kan även sätta in symboliska variabler, `potsum4(j)` eller `potsum4(n+m)`.

Lägg märke till att `potsum4` byter typ från uttryck till funktion utan några som helst protester.

Maple klarar också funktioner av flera variabler. Partiella derivator är inte heller svårt.

1.15 Definiera funktionen $f(x, y) = x^2 - y^3 + xy$ i Maple på följande sätt:

```
f := (x,y) -> x^2-y^3+x*y;
```

Vad ger `f(0,0)` och $f(3, 2)$?

Beräkna

$$\frac{\partial f}{\partial x} \text{ och } \frac{\partial f}{\partial y}$$

för funktionen ovan genom kommandona `diff(f(x,y),x)` resp `diff(f(x,y),y)`.

Svar:..

Komplexa tal och funktioner

Vid räkning med komplexa tal behöver man ofta skriva dem på formen $a+ib$ med a och b reella. Det behövliga Maplekommandot är `evalc` (*evaluate complex*). Realdelar och imaginärdelar beräknas med funktionerna `Re` och `Im`. Vi vill arbeta med den komplexa variabeln $z = x + iy$, där x och y är reella.

1.16 Detta kan åstadkommas med

```
z := x+I*y;
assume(x,real);
assume(y,real);
x; # testa x
y; # testa y
```

I fortsättningen skriver Maple ut x och y som `x~` och `y~` för att markera att vi lagt villkor på dem.

1.17 Beräkna absolutbeloppet $|z|$ och argumentet av $z = 1 + \sqrt{3}i$ genom kommandona

```
abs(z);
argument(z);
```

Svar:..

1.18 Sätt $f(z) = z^3 - 2z$ och beräkna $u = \operatorname{Re} f$ och $v = \operatorname{Im} f$.

```
f := z->z^3-2*z;
u := Re(evalc(f(z)));
u := unapply(Re(evalc(f(z))),x,y);
v := unapply(Im(evalc(f(z))),x,y);
```

Svar:..

Bilder av den komplexa exponentialfunktionen

Vi skall nu se på den komplexa exponentialfunktionen $f(t) = e^{st}$ från olika synvinklar.

1.19 Definiera funktionen genom

```
f := t -> exp(s*t);
s := sigma + I*omega;
evalc(f(t));
assume(sigma, real); assume(omega, real);assume(t,real);
Re(f(t));
Im(f(t));
```

Funktionen `evalc` (evaluate complex) försöker dela upp sitt argument i real- och imaginärdel, varvid den antar att alla variabler som inte har ett värde är reella. Det framgår hur man tar fram realdel och imaginärdel. Andra operationer kan inte veta om t ex σ, ω och t är reella eller ej, men man kan tala om det med `assume`. Variabler om vilka man gjort en förutsättning med `assume` visas av Maple upp med ett tilde `~`.

För att kunna rita måste vi ge σ och ω numeriska värden. Med kommandot `plot` kan man rita såväl parameterkurvor som funktionskurvor.

1.20 Slå in kommandona

```
sigma := -0.3;
omega := 5;
plot([Re(f(t)),Im(f(t)),t=0..10],scaling=CONSTRAINED);
plot([t,Re(f(t)),t=0..10],scaling=CONSTRAINED);
plot([t,Im(f(t)),t=0..10],scaling=CONSTRAINED);
```

(`scaling=CONSTRAINED` medför att Maple använder samma skala på horisontell och vertikal axel. Utelämnar man det kan kurvan bli felskalad. Man kan också ändra detta i högerknappsmenyn i bildfönstret under Projections.)

För att kunna rita tredimensionella figurer måste man ladda in en grafikmodul i Maple.

1.21 Rita en rymdkurva med kommandona

```
with(plots);
spacecurve([t,Re(f(t)),Im(f(t)),t=0..10],scaling=CONSTRAINED);
```

Lägg märke till att man kan vrida de tredimensionella figurerna i bildfönstret. Håll vänsterknappen nedtryckt i bildfönstret och flytta musen. Bilden ritas om då man dubbelklickar i bildfönstret. I högerknappsmenyn kan man välja olika visningalternativ. Vill ni ha en mindre kantig kurva så lägg till `numpoints=100,` innan `scaling`.

Stegfunktionen $\theta(t)$ och impulsfunktionen $\delta(t)$

Maple känner till deltafunktionen $\delta(t)$, som fås med `Dirac(t)`, och stegfunktionen $\theta(t)$, som fås med `Heaviside(t)`, och kan ofta räkna rätt med dem.

1.22 Beräkna derivatan av $\theta(t)$ och $e^{-t}\theta(t)$ med hjälp av Maple. Använd `simplify` på det senare resultatet så ser ni att Maple kan regeln $f(t)\delta(t-a) = f(a)\delta(t-a)$. Glöm inte att först återställa t som variabel, om det blev konstanten: `t:='t'`.

1.23 Derivatan av $\delta(t)$, alltså $\delta'(t)$ betecknas i Maple med $Dirac(1,t)$ (och vid högre derivator ersätts 1 med derivationsordningen). Låt Maple förenkla uttrycket $\sin(t)\delta'(t-2)$ och jämför med vad du själv fått det till.

Svar:...

Vill man beräkna funktioner som är noll för positiva t, alltså som innehåller $1-\theta(t)$, så får man skriva om detta med hjälp av likheten $1-\theta(t)=\theta(-t)$.

1.24 Lös övning 2.11 med hjälp av Maple. Förenklar Maple svaret?

Svar:...

1.25 Lös övning 2.9 med Maple.

Svar:...

Laplacetransformation

Maple kan räkna med *ensidiga* Laplacetransformer. Efter att ha gett kommandot `with(inttrans);` (eller `readlib(laplace);` i äldre versioner) laddar man biblioteket och kan använda `laplace` och `invlaplace`.

1.26 Beräkna Laplacetransformen i övning 3.1a. Den fås med

```
laplace(exp(-2*t)*Heaviside(t),t,s);
```

Stämmer det med facit?

Svar:...
Kontrollera resultatet med

```
invlaplace(%,s,t);
```

Observera att endast

```
laplace(exp(-2*t),t,s);
```

räcker – Maple antar att allt är kausalt. På grund av det ser man inte Heaviside funktionen i Maples svar.

Problemen vid Laplacetransformation uppkommer i regel vid inverstransformationen.

1.27 Lös några deluppgifter i 4.6, 4.11.

En av de metoder som Maple använder i kommandot `dsolve` för lösning av differentialekvationer är i själva verket Laplacetransformation.
För att visa Maples möjligheter så går vi igenom en lösning av integralekvationen.

1.28 Finn en lösning till integralekvationen

$$\int_0^x f(x-y)f(y)\,dy = x^3e^x, \quad x>0.$$

Det kan man göra så här:

```
intekv := int(f(x-y)*f(y),y=0..x)=x^3*exp(x);
laplace(intekv,x,s);
```

Vi byter ut Laplaceuttrycket mot något enklare, löser ut detta och väljer en lösning att inverstransformera.

```
subs(laplace(f(x),x,s)=U,%);
losningar := solve(%,U);
F := losningar[1];
invlaplace(F,s,x);
```

Med `F:=losningar[2]` hade vi fått den negativa lösningen.

Lösningsmetoden ovan innehåller några moment som kanske är obekanta. Använd Mapledokumentationen för att få reda på vad okända kommandon gör.

För att göra tvåsidig Laplacetransformation integrerar man direkt. Det enklaste är dock att skriva ett litet program.

```
laplace2:=proc(f,s,t) int(exp(-s*t)*f,t=-infinity..infinity) end;
```

1.29 Beräkna tvåsidig Laplacetransformation av $\theta(t)$ genom

```
laplace2( Heaviside(t),s,t);
```

Vad är resultat? Kan du tolka det?

Svar:...

Addera ett kommandot till:

```
assume (Re(s)>0)
laplace2(Heaviside(t),s,t);
```

Vad är resultatet nu? Kan du tolka det?

1.30 Beräkna tvåsidig Laplacetransformation av e^{-x^2} genom

```
laplace2(exp(-t^2),s,t);
```

Svar:...

Intressant är att resultatet var felaktigt i en av versioner av Maple, trots att det var rätt i gamla. Inte alla förbätringar gör programmet bättre. Tror du på din resultat?

Samma metoder använder man för faltningen.

1.31 Beräkna faltningen i övning 6.5. Skriv gärna en procedur för att beräkna faltningar.

Svar:...