4.16

Sätt

$$F(s) = \frac{s^2}{s^4+4}$$

a) Bestäm uppbygnaden av den inversa Laplacetransformen till $F(s)$.

b) Beräkna $\mathcal{L}^{-1}F$.

Lösning:

a) Notera att genom att lägga till en nolla, dvs $+4s^2 - 4s^2$ får man

$$\begin{aligned} F(s) &= \frac{s^2}{(s^4+4s^2+4)-4s^2} = \frac{s^2}{(s^2+2)^2-4s^2} \\ &= \frac{s^2}{(s^2+2s+2)(s^2-2s+2)} \end{aligned}$$

vilket kan skrivas som

$$F(s) = \frac{s^2}{((s+1)^2+1)((s-1)^2+1)}$$

Därför ska partiallbråksuppdelningen ha formen

$$F(s) = \frac{As+B}{(s+1)^2+1} + \frac{Cs+D}{(s-1)^2+1}$$

men då A, B, C och D bara är konstanter kan vi istället använda formen

$$F(s) = \frac{A(s+1)+B}{(s+1)^2+1} + \frac{C(s-1)+D}{(s-1)^2+1}$$

Därför ser man att formen på den inversa Laplacetransformen kommer att vara

$$f(t) = \left(e^{-t}\left(A\cos t + B\sin t\right) + e^{t}\left(C\cos t + D\sin t\right)\right)\theta(t)$$

b) För att få rätt på konstanterna utförs lämpligen koefficient identifiering. Vi ser att

$$s^2 = (A(s+1)+B)\left(s^2-2s+2\right) + (C(s-1)+D)\left(s^2+2s+2\right)$$

ger

$$\begin{cases} -2A + 2B + 2C + 2D = 0 \\ 2B - 2D = 0 \\ A + B + C + D = 1 \\ A + C = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} A = 1/4 \\ B = 1/4 \\ C = -1/4 \\ D = 1/4 \end{cases}$$

Alltså får vi att

$$f(t) = \frac{1}{4}\left(e^{-t}\left(\cos t + \sin t\right) + e^{t}\left(\sin t - \cos t\right)\right)\theta(t)$$

4.17

Sätt

$$F(s) = \frac{s+1}{(s^2+1)^2}$$

a) Bestäm uppbygnaden av den inversa Laplacetransformen till $F(s)$.

b) Beräkna $\mathcal{L}^{-1}F$.

Lösning 1:

a) Vi ser att uttrycket förenklas till

$$F(s) = \frac{s+1}{(s+i)^2\,(s-i)^2}$$

vilket innebär att det ska partiallbråksuppdelas enligt

$$F(s) = \frac{A}{s-i} + \frac{B}{(s-i)^2} + \frac{C}{s-i} + \frac{D}{(s-i)^2}$$

vilket i sin tur innebär att uppbygnaden av den inversa Laplacetransformen är

$$f(t) = \left(Ae^{-it} + Ce^{it} + tBe^{-it} + tDe^{it}\right)\theta(t) \tag{1}$$

Då A, B, C och D bara är konstanter och eftersom

$$\cos t = \frac{e^{it}+e^{-it}}{2}$$
$$\sin t = \frac{e^{it}-e^{-it}}{2i}$$

kan vi istället använda formen

$$f(t) = (A\sin t + B\cos t + tC\sin t + tD\cos t)\,\theta(t)$$

b) Från partiallbråksuppdelningen får vi

$$s+1 = A(s-i)^2(s-i) + B(s-i)^2 + C(s-i)(s+i)^2 + D(s+i)^2$$

vilket ger att

$$\begin{cases} -A - \quad B \quad +i\,C - \quad D & = 1 \\ A - 2i\,B \quad + \;C + 2i\,D & = 1 \\ -iA + \quad B \quad +i\,C - \quad D & = 0 \\ A \qquad\quad + \;C & = 0 \end{cases} \quad \Rightarrow \quad \begin{cases} A = & -i/4 \\ B = & -(1-i)/4 \\ C = & i/4 \\ D = & -(1+i)/4 \end{cases}$$

När dessa värden sätts in i (1) får vi

$$f(t) = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{2i}\left(e^{it}-e^{-it}\right) + t\left(\frac{1}{2i}\left(e^{it}-e^{-it}\right) - \frac{1}{2}\left(e^{it}+e^{-it}\right)\right)\right)\theta(t).$$

Notera att $-\frac{i}{4} = \frac{1}{2}\frac{1}{2i}$. Därför blir svaret

$$f(t) = \frac{1}{2}\left(\sin t + t\,(\sin t - \cos t)\right)\,\theta(t)$$

Lösning 2:

a) Då nämnaren innehåller $(s^2+1)^2$ undersöks

$$f \overset{\mathcal{L}}{\longmapsto} F$$

$$\begin{array}{ll} \sin t\,\theta(t) & \dfrac{1}{s^2+1} = \dfrac{s^2+1}{(s^2+1)^2} \\ t\,\sin t\,\theta(t) & -\dfrac{d}{ds}\left(\dfrac{1}{s^2+1}\right) = \dfrac{2s}{(s^2+1)^2} \\ \cos t\,\theta(t) & \dfrac{s}{s^2+1} = \dfrac{s^3+s}{(s^2+1)^2} \\ t\,\cos t\,\theta(t) & -\dfrac{d}{ds}\left(\dfrac{s}{s^2+1}\right) = \dfrac{s^2-1}{(s^2+1)^2} \end{array}$$

Man ser att kombinationer av dessa fyra kan ge Laplaceuttryck av formen

$$\frac{p(s)}{(s^2+1)^2}$$

med grad $p \leq 3$. Alltså har den inversa Laplacetransformen uppbyggnaden

$$f(t) = ((At+B)\sin t + (Ct+D)\sin t)\ \theta(t)$$

b)

För att identifiera koefficienterna undersöks

$$s+1 = 2sA + B(s^2+1) + C(s^2-1) + D(s^3+s)$$

vilket ger att

$$\begin{cases} B - C = 1 \\ 2A + D = 1 \\ B + C = 0 \\ A + D = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} A = & 1/2 \\ B = & 1/2 \\ C = & -1/2 \\ D = & 0 \end{cases}$$

Alltså har vi

$$f(t) = \frac{1}{2}\left(\sin t + t\ (\sin t - \cos t)\right)\ \theta(t)$$