LUNDS TEKNISKA HÖGSKOLA
MATEMATIK

TENTAMENSSKRIVNING
Tillämpad matematik – svar
2016-03-15

1. a) Eftersom $F(t) = \frac{e^{3t}+e^{-3t}}{3}$ är en primitiv funktion till $(e^{3t} - e^{-3t})$ är

$$(F(t) - F(0))\theta(t) = \frac{(e^{3t} + e^{-3t} - 2)}{3}\theta(t)$$

en primitiv till $f(t)$.

b) Vi har $f'(t) = 3(e^{3t} + e^{-3t})\theta(t) + (e^{3t} - e^{-3t})\delta(t) =$

$$3(e^{3t} + e^{-3t})\theta(t) + (e^0 - e^0)\delta(t) = 3(e^{3t} + e^{-3t})\theta(t).$$

$$f''(t) = 9(e^{3t} - e^{-3t})\theta(t) + 3(e^{3t} + e^{-3t})\delta(t) = 9f(t) + 6\delta(t).$$

Alltså är $9f(t) - f''(t) = -6\delta(t)$.

c) Från föregående uppgift följer direkt att $\frac{f(t)}{6}$ är en kausal lösning. En alternativ lösning får man med hjälp av Laplace transformen.

2. a) Se bocken!

b) $\theta(t)\int_0^t e^{t-\tau}\cdot 1 d\tau = (e^t - 1)\theta(t)$. En alternativ lösning får man med hjälp av Laplace transformen.

c) $f(x_1, x_2) = 5x_1^2 + 10x_1x_2 + 5x_2^2$. Eftersom $f(1, -1) = 0$ är formen inte positivt definit.

d) $\det A = \lambda_1\lambda_2\cdots\lambda_n$; $\operatorname{tr} A = \lambda_1 + \lambda_2 + \cdots + \lambda_n$.

e) $b + ia = -1 + i$.

3. a) På sedvanligt sätt bestämmer vi egenvärdena $\lambda_1 = 4, \lambda_2 = 2$ och motsvarande egenvektorerna $t_1(1,1)^T$ och $t_2(1,-1)^T$ med $t_1 \neq 0, t_2 \neq 0$.

b) Efter normering av (redan ortogonala) egenvektorer får vi

$$Q = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}; \quad D = \begin{pmatrix} 4 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}.$$

c) $e^{At} = Qe^{Dt}Q^T =$

$$\frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} e^{4t} & 0 \\ 0 & e^{2t} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} e^{4t}+e^{2t} & e^{4t}-e^{2t} \\ e^{4t}-e^{2t} & e^{4t}+e^{2t} \end{pmatrix}.$$

d) $\begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix} = e^{At}\begin{pmatrix} x(0) \\ y(0) \end{pmatrix} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} e^{4t}+e^{2t} & e^{4t}-e^{2t} \\ e^{4t}-e^{2t} & e^{4t}+e^{2t} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} \Rightarrow$

$$\begin{cases} x_1(t) &= \frac{1}{2}(3e^{4t} + e^{2t}) \\ x_2(t) &= \frac{1}{2}(3e^{4t} - e^{2t}) \end{cases}.$$

4. a) Vi har direkt att $H(s) = \frac{s+2}{s^2+3s+2} = \frac{1}{s+1}$ och $h(t) = \mathcal{L}^{-1}H(s) = e^{-t}\theta(t)$.

b) Eftersom $0 = \deg(1) < 1 = \deg(s+1)$, och den enda pol $s = -1$ är negativ är systemet stabilt.

c) Eftersom $\mathcal{L}w_1(t) = \frac{2}{s^2+4}$ är

$$y_1(t) = \mathcal{L}^{-1}(H(s)\mathcal{L}w_1(t)) = \mathcal{L}^{-1}\left(\frac{2}{(s+1)(s^2+4)}\right) =$$

$$\mathcal{L}^{-1}\frac{2}{5}\left(\frac{1}{s+1} + \frac{-s+1}{s^2+4}\right) = \frac{1}{5}(2e^{-t} - 2\cos 2t + \sin 2t)\theta(t).$$

d) $y_2(t) = \mathrm{Im}\left(\mathcal{S}e^{2it}\right) = \mathrm{Im}\left(\frac{1}{1+2i}(\cos 2t + i\sin 2t)\right) = \frac{1}{5}(-2\cos t + \sin t)$.

5. Eftersom $\cos t = \frac{1}{2}\left(e^{it} + e^{-it}\right)$ och $1 = e^{i0t}$ får matrisen minst tre egenvärde:$i, -i, 0$.

a) Storlek kan inte vara 2 om det finns mer än 2 egenvärena. Påståendet är alltså sant.

b) Eftersom $b_{ij}(0) = 0$ kan inte elementen ligga på diagonalen. Påståendet är falskt.

c) Eftersom en av egenvärdena lika med 0 är det $A = 0$. Påståendet är falskt.

d) Eftersom vi har en term av form te^{at} kan inte A vara diagonaliserbar. Påståendet är falskt.

e) Eftersom ett av egetvärdena är lika med i kan inte A vara symmetrisk. Påståendet är falskt.

6. Om vi byter x mot t och y mot τ har vi efter multiplikation med $\theta(t)$:

$$f(t)\theta(t) + 2f'(t)\theta(t) * \sin 2t\theta(t) = e^{-2t}\theta(t).$$

Om $F(s) = \mathcal{L}(f(t)\theta(t))$ har vi:

$$F + 2(sF - 1)\frac{2}{s^2+4} = \frac{1}{s+2} \Rightarrow F(s^2 + 4 + 4s) = 4 + \frac{s^2+4}{s+2} \Rightarrow$$

$$F(s) = \frac{s^2+4s+12}{(s+2)^3} = \frac{1}{s+2} + \frac{8}{(s+2)^3} \Rightarrow f(t)\theta(t) = \theta(t) + 4t^2e^{-2t}\theta(t).$$

Då är $f(t) = (1+4t^2)e^{-2t}$ och kontroll bekräftar att $f(0) = 1$. Observera att den sista villkor foljer direkt från ursprunglig ekvationen (sätt $x = 0$) och skulle det vara villkor $f(0) = 2$ skulle samma lösning ger felaktig resultat. Därför var kontrollen nödvändig.