

Hjälpmedel: utdelat formelblad. Lösningarna skall vara försedda med ordentliga motiveringar. Skriv fullständiga meningar och förklara dina beteckningar. Alla svar skall förklaras så långt som möjligt.

1. Låt

$$f(t) = \begin{cases} 0, & \text{om } t \leq 0, \\ t - 1, & \text{om } 0 < t. \end{cases}$$

Beräkna:

a) f'' , (0.3)

b) en kausal primitiv till $f(t)$, (0.3)

c) en kausal lösning till ekvationen $x' + 3x = f(t)$. (0.4)

2. a) System i insignal-utsignalform kan ibland beskrivas som faltningar med en fix funktion. Under vilka villkor på systemet gäller detta och vad kallas den fixa funktionen? (0.2)

b) Vad menas med att ett system i insignal-utsignalform är kausalt? (0.2)

c) Förenkla uttrycket $(\theta(t) * f(t)\theta(t))'$. (0.2)

d) För vilken generaliserad funktion $g(t)$ gäller att $f(t) * g(t) = 2f'(t - 1)$? (0.2)

e) För vilka a är matrisen

$$\begin{bmatrix} 3 & 5 \\ 0 & a \end{bmatrix}$$

icke-diagonaliserbar? Motivera svaret. (0.2)

3. a) Beräkna samtliga egenvärden och egenvektorer till matrisen

$$A = \begin{bmatrix} 3 & 2 \\ 2 & 3 \end{bmatrix}.$$

(0.2)

b) Beräkna exponentialmatrisen $B(t) = e^{At}$. (0.3)

c) Är $B(t)$ positivt definit för alla t ? (0.2)

d) Lös begynnelsevärdesproblemet

$$\begin{cases} x_1' = 3x_1 + 2x_2 \\ x_2' = 2x_1 + 3x_2 \end{cases}, \quad x_1(0) = 1, x_2(0) = 2.$$

(0.3)

V.g. vänd!

4. I ett (kausalt) högpasfilter är sambandet mellan insignal $w(t)$ och utsignal $y(t)$

$$Cy' + y = RCw'.$$

Antar att $R = C = 1$.

a) Bestäm filters impulssvar och överföringsfunktion. (0.2)

b) Bestäm systemets amplitudfunktion $A(\omega)$. Varför kallas systemet för högpasfilter? (0.2)

c) Ange utsignalen $y_1(t)$ om insignalen är $w_1(t) = \sin t$. (0.3)

d) Ange utsignalen $y_1(t)$ om insignalen är $w_2(t) = \sin 2t \theta(t)$. (0.3)

5. Laplacetransformationen av en kausal funktion $f(t)$ är lika med $F(s) = \frac{\pi}{2} - \arctan s$.

a) Bestäm $\int_0^\infty f(t)dt$. (0.3)

b) Bestäm Laplacetransformationen av $tf(t)$. (0.2)

c) Bestäm $f(t)$. (0.3)

d) Bestäm faltningen $\frac{\sin t}{t} * 1$. (0.2)

6. Lösningen x till den linjära integralekvationen

$$x(t) + \int_0^t \cos(t - \tau)x(\tau)d\tau = y(t), t > 0$$

där $y(t)$ är en given funktion, är av formen

$$x(t) = y(t) + \int_0^t f(t - u)y(u)du, t > 0.$$

Bestäm funktionen $f(t)$.

LYCKA TILL!