LUNDS TEKNISKA HÖGSKOLA
MATEMATIK

TENTAMENSSKRIVNING
Tillämpad matematik – lösningar
2010-03-08

1. a) Eftersom $F(t) = \int e^t dt = e^t$ har vi

$$\int e^t\theta(t)dt = (F(t) - F(0))\theta(t) = (e^t - 1)\theta(t).$$

Svar: $(e^t - 1)\theta(t)$.

b) $(e^t\theta(t))' = (e^t)'\theta(t) + e^t(\theta(t))' = e^t\theta(t) + e^t\delta(t) = e^t\theta(t) + \delta(t)$.
Svar: $e^t\theta(t) + \delta(t)$.

c) Eftersom

$$\mathcal{L}g(t) = \mathcal{L}(f'(t)) = s\mathcal{L}(f(t)) = s\mathcal{L}(e^t\theta(t)) = s \cdot \frac{1}{s-1},$$

får vi ekvationen för $X(s) = \mathcal{L}x(t)$:

$$s^2X + 4sX + 5 = \frac{s}{s-1} \Rightarrow X = \frac{s}{(s+1)(s^2+4s+5)} = \frac{A}{s-1} + \frac{Bs+C}{s^2+4s+5} \Rightarrow$$

$$s = A(s^2 + 4s + 5) + (Bs + C)(s - 1).$$

$s = 1$ ger $C = \frac{1}{10}$, sedan $s = 0$ ger $C = \frac{1}{2}$ och till slut $s = -1$ ger $B = -\frac{1}{10}$. Alltså är

$$X(s) = \frac{1}{10}\left(\frac{1}{s-1} + \frac{-s+5}{s^2+4s+5}\right) \Rightarrow$$

$$x(t) = \frac{1}{10}\mathcal{L}^{-1}\left(\frac{1}{s-1} - \frac{s+2}{(s+2)^2+1} + \frac{7}{(s+2)^2+1}\right) = \frac{1}{10}(e^t - e^{-2t}\cos t + 7e^{-2t}\sin t)\theta(t).$$

Svar: $\frac{1}{10}(e^t - e^{-2t}\cos t + 7e^{-2t}\sin t)\theta(t)$.

2. a) Se bocken!

b) Till exempel,

$$A = \begin{bmatrix} 7 & 0 \\ 0 & 7 \end{bmatrix}$$

som redan är diagonalmatris.

c) $H(s) = \frac{\mathcal{S}e^{st}}{e^{st}}$.

d) Nej, eftersom $f(1, -1) < 0$.

e) Eftersom $\omega = \frac{1}{3}$ och $A(\frac{1}{3}) = \frac{1}{2}, \phi(\frac{1}{3}) = -\arctan 1 = -\frac{\pi}{4}$ är svaret lika med

$$\frac{1}{2}e^{i\left(\frac{t}{3} - \frac{\pi}{4}\right)}.$$

3. a) Först gör vi partialbråksuppdelning:

$$\frac{s-10}{s(s-11)} = \frac{1}{11}\left(\frac{10}{s} + \frac{1}{s-11}\right); \frac{s-2}{s(s-11)} = \frac{1}{11}\left(\frac{2}{s} + \frac{9}{s-11}\right);$$

$$\frac{1}{s(s-11)} = \frac{1}{11}\left(\frac{-1}{s} + \frac{1}{s-11}\right); \frac{3}{s(s-11)} = \frac{1}{11}\left(\frac{-3}{s} + \frac{3}{s-11}\right).$$

Med hjälp av det har vi

$$e^{At}\theta(t) = \mathcal{L}^{-1}(R_A(s)) = \frac{1}{11}\begin{bmatrix} 10\theta(t)+e^{11t}\theta(t) & -\theta(t)+e^{11t}\theta(t) & -3\theta(t)+3e^{11t}\theta(t) \\ -\theta(t)+e^{11t}\theta(t) & 10\theta(t)+e^{11t}\theta(t) & -3\theta(t)+3e^{11t}\theta(t) \\ -3\theta(t)+3e^{11t}\theta(t) & -3\theta(t)+3e^{11t}\theta(t) & 2\theta(t)+9e^{11t}\theta(t) \end{bmatrix} \Rightarrow$$

$$e^{At} = \frac{1}{11}\begin{bmatrix} 10+e^{11t} & -1+e^{11t} & -3+3e^{11t} \\ -1+e^{11t} & 10+e^{11t} & -3+3e^{11t} \\ -3+3e^{11t} & -3+3e^{11t} & 2+9e^{11t} \end{bmatrix}.$$

b) Eftersom ett av egetvärdena är lika med 0 (som vi ser i exponentmatrisen) är determinanten som deras produkt också lika med 0.

c)

$$X(t) = e^{At}X(0) = \frac{1}{11}\begin{bmatrix} 10+e^{11t} & -1+e^{11t} & -3+3e^{11t} \\ -1+e^{11t} & 10+e^{11t} & -3+3e^{11t} \\ -3+3e^{11t} & -3+3e^{11t} & 2+9e^{11t} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix} = \frac{1}{11}\begin{bmatrix} 3+8e^{11t} \\ 3+8e^{11t} \\ -2+24e^{11t} \end{bmatrix}.$$

d) Eftersom ett av egetvärdena är lika med 0 är matrisen icke stabil

4. a) Eftersom impulssvaret är derivatan av stegsvaret har vi:

$$h(t) = (e^{-t})'\theta(t) + (e^{-t})\delta(t) = -e^{-t}\theta(t) + \delta(t) \Rightarrow H(s) = -\frac{1}{s+1} + 1 = \frac{s}{s+1}.$$

Svar: Överföringsfunktionen är $H(s) = \frac{s}{s+1}$.

b) Enligt ovan:

Svar: $h(t) = -e^{-t}\theta(t) + \delta(t)$.

c) $y_1(t) = h(t) * \sin t\theta(t) \Rightarrow Y(s) = H(s)\frac{1}{s^2+1} = \frac{s}{s+1} \cdot \frac{1}{s^2+1}$.

Partialbråksuppdelning ger:

$$y(t) = \mathcal{L}^{-1}\left(\frac{-1}{2} \cdot \frac{1}{s+1} + \frac{1}{2} \cdot \frac{s+1}{s^2+1}\right) = \frac{1}{2}(-e^{-t} + \cos t + \sin t)\theta(t).$$

Svar: $\frac{1}{2}(-e^{-t} + \cos t + \sin t)\theta(t)$.

d) Eftersom $y_2(t) = \mathbf{I}m(e^{it})$, har vi

$$\mathcal{S}y_2(t) = \mathbf{I}m\left(\mathcal{S}e^{it}\right) = \mathbf{I}m\left(\frac{i}{i+1}e^{it}\right) = \mathbf{I}m\left(\frac{i(1-i)}{2}(\cos t + i\sin t)\right) = \frac{1}{2}(\sin t + \cos t).$$

Svar: $\frac{1}{2}(\sin t + \cos t)$.

e) Systemet är stabilt därför att $\deg s \leq \deg(s+1)$ och den enda polen $s = -1$ är negativ.

5. Vi har $\lambda_1 = 1+i, \lambda_2 = 1-i, \lambda_3 = -1, \lambda_4 = -3, \lambda_5 = 0$.

a) Matrisen är diagonaliserbar eftersom alla egenvärde är olika (Dock är den inte diagonaliserbar med hjälp av en reell matris eftersom ett av egetvärdena inte är reelt).

b) Matrisen är inte inverterbar eftersom ett av egetvärdena är lika med 0 och determinanten är lika med 0.

c) Matrisen är inte symmetrisk eftersom ett av egetvärdena inte är reelt.

d) Matrisen är inte inverterbar ortogonal eftersom determinanten är lika med 0. (vilket strider mot $AA^t = I$.).

e) $\det A = 0$ enligt ovan och $\operatorname{tr} A = \sum \lambda_i = -2$.

6. Låt $x = t - 2010$. Då har vi

$$\int_0^x f(x-\tau)d\tau = f'(x) + x \Leftrightarrow \int_0^t f(t-\tau)d\tau = f'(t) + t.$$

Om vi multiplicerar ekvationen med $\theta(t)$ kan den omskrivas som

$$f(t)\theta(t) * \theta(t) = f'(t)\theta(t) + t\theta(t).$$

Då får vi

$$F(s)\frac{1}{s} = sF(s) - 8 + \frac{1}{s^2} \Rightarrow$$

$$F(s) = \frac{1-8s^2}{s(1-s^2)} = \frac{1}{s} + \frac{7}{2}\left(\frac{1}{s-1} + \frac{1}{s+1}\right) \Rightarrow f(t)\theta(t) = \theta(t) + \frac{7}{2}(e^t + e^{-t})\theta(t).$$

Då är $f(t) = 1 + \frac{7}{2}(e^t + e^{-t})$ en möjlig lösning och vi kontrollerar att $f(0) = 8$.

Svar: Till exempel, $1 + \frac{7}{2}(e^t + e^{-t})$.