

Hjälpmedel: utdelat formelblad. Lösningarna skall vara försedda med ordentliga motiveringar. Skriv fullständiga meningar och förklara dina beteckningar. Alla svar skall förklaras så långt som möjligt.

1. Låt $f(t) = e^t \theta(t)$.

a) Bestäm en primitiv funktion till $f(t)$. (0.3)

b) Bestäm $g(t) = f'(t)$. (0.2)

c) Bestäm en kausal lösning till ekvationen

$$x'' + 4x' + 5x = g(t). \quad (0.5)$$

2. a) Vad menas med att ett system i insignal-utsignalform är kausalt? (0.2)

b) Alla egenvärden till en kvadratisk matris är lika med 7. Kan den vara diagonaliserbar? Ge exempel om svaret är "ja" eller bevis (att den inte är diagonaliserbar) om svaret är "nej". (0.2)

c) Definiera överföringsfunktionen $H(s)$ för ett linjärt tidsinvariant system. (0.2)

d) Är den kvadratiske formen

$$f(x, y) = 4x^2 + 16xy + 4y^2$$

positivt definit? (0.2)

e) Vad blir svaret på insignalen $w(t) = e^{it/3}$ om amplitudfunktionen är $A(\omega) = \frac{1}{1+9\omega^2}$ och fasfunktionen är $\phi(\omega) = -\arctan 3\omega$? (0.2)

3. För en symmetrisk matris A är det känt att resolventmatrisen $R_A(s) = (sI - A)^{-1}$ ser ut som:

$$R_A(s) = \frac{1}{s^2 - 11s} \begin{bmatrix} s - 10 & 1 & 3 \\ 1 & s - 10 & 3 \\ 3 & 3 & s - 2 \end{bmatrix}.$$

a) Bestäm exponentialmatrisen e^{At} . (0.4)

b) Bestäm $\det A$. (0.2)

c) Lös begynnelsevärdesproblemet

$$X' = AX, \quad X(0) = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix}.$$

(0.2)

d) Är matrisen A stabil? (0.2)

V.g. vänd!

4. Systemet \mathcal{S} är linjärt och tidsinvariant. Systemets stegsvar är

$$\mathcal{S}\theta(t) = e^{-t}\theta(t).$$

a) Bestäm överföringsfunktionen. (0.2)

b) Bestäm impulssvaret. (0.2)

c) Ange utsignalen $y_1(t)$ om insignalen är

$$w_1(t) = \sin t \theta(t). \quad (0.2)$$

d) Ange utsignalen $y_2(t)$ om insignalen är

$$w_2(t) = \sin t. \quad (0.3)$$

e) Är systemet stabilt? (0.1)

5. För en matris A är det karakteristiska polynomet lika med

$$p_A(\lambda) = (\lambda^2 - 2\lambda + 2)(\lambda + 1)(\lambda + 3)\lambda.$$

a) Är matrisen diagonaliserbar? (0.2)

b) Är matrisen inverterbar? (0.2)

c) Är matrisen symmetrisk? (0.2)

d) Är matrisen ortogonal? (0.2)

e) Bestäm $\text{tr } A$ och $\det A$. (0.2)

6. Bestäm en funktion $f(t)$, som för $t > 2010$ uppfyller ekvationen

$$\int_0^{t-2010} f(t-2010-\tau)d\tau = f'(t-2010) + t - 2010$$

och som dessutom uppfyller $f(0) = 8$.

LYCKA TILL!