LUNDS TEKNISKA HÖGSKOLA
MATEMATIK

TENTAMENSSKRIVNING
Linjär analiys för D. Lösningar.
2013-3-15

1. a) Vi har

$$((t-1)\theta(t))'\,(t-1)'\theta(t)+(t-1)(\theta(t))'=\theta(t)+(t-1)\delta(t)=\theta(t)-\delta(t).$$

$$((t-1)\theta(t))''=\delta(t)-\delta'(t).$$

b) Eftersom $F(t)=\frac{1}{2}t^2-t$ är en primitiv till $t-1$ har vi att $(F(t)-F(0))\theta(t)$ är en primitiv till $f(t)$ och svaret är $\frac{t^2-2t}{2}\theta(t)$.

c) Om $X=\mathcal{L}f$ har vi

$$sX+3X=\frac{1}{s^2}-\frac{1}{s}\Rightarrow X=\frac{1-s}{(s+3)s^2}=\frac{1}{9}\left(\frac{4}{s+3}-\frac{4}{s}+\frac{3}{s^2}\right)\Rightarrow$$

$$x=\frac{1}{9}\left(4e^{-3t}-4+3t\right)\theta(t).$$

2. a) Systemet är linjärt och tidsinvariant, funktionen är impulssvaret $h(t)$.

b) Om insignal $w(t)=0$ för $t<t_0$ så är utsignal $y(t)=0$ för $t<t_0$.

c) $(\theta(t)*f(t)\theta(t))'=(\theta(t))'*f(t)\theta(t)=\delta(t)*f(t)\theta(t)=f(t)\theta(t)$.

d) för $2\delta'(t-1)$.

e) för $a=3$ har matrisen alla egenvärdena lika, men inte är diagonal matris och därför inte är diagonaliserbar.

3. a) På sedvanligt sätt bestämmer vi egenvärdena $\lambda_1=5$ och $\lambda_2=1$. Egenvektorerna beräknas till $v_1=t[1,1]^T$ resp. $v_2=t[-1,1]^T$, där i båda fallen $t\neq 0$.

b) Om $S=\begin{pmatrix}1 & -1\\ 1 & 1\end{pmatrix}$, då är

$$S^{-1}=\frac{1}{2}\begin{pmatrix}1 & 1\\ -1 & 1\end{pmatrix}, S^{-1}AS=D=\begin{pmatrix}5 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}\Rightarrow B(t)=e^{At}=$$

$$Se^{Dt}S^{-1}=\begin{pmatrix}1 & -1\\ 1 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}e^{5t} & 0\\ 0 & e^{t}\end{pmatrix}\frac{1}{2}\begin{pmatrix}1 & 1\\ -1 & 1\end{pmatrix}=\frac{1}{2}\begin{pmatrix}e^{5t}+e^{t} & e^{5t}-e^{t}\\ e^{5t}-e^{t} & e^{5t}+e^{t}\end{pmatrix}.$$

c) Eftersom egenvärdena e^{5t},e^{t} är positva är symmetrisk matris $B(t)$ positivt definit.

d)

$$\begin{pmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{pmatrix} = e^{At} \begin{pmatrix} x_1(0) \\ x_2(0) \end{pmatrix} =$$

$$\frac{1}{2} \begin{pmatrix} e^{5t}+e^t & e^{5t}-e^t \\ e^{5t}-e^t & e^{5t}+e^t \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 3e^{5t}-e^t \\ 3e^{5t}+e^t \end{pmatrix}.$$

4. a) Vi har $sY + Y = sW \Rightarrow H(s) = \frac{s}{s+1} = 1 - \frac{1}{s+1} \Rightarrow h(t) = \delta(t) - e^{-t}\theta(t)$.

b) $A(\omega) = \left|\frac{i\omega}{1+i\omega}\right| = \frac{|\omega|}{\sqrt{1+\omega^2}}$. Vi ser att för små ω är amplituden av utsignal liten och signalen filtreras. Däremot för höga frekvensen är $A(\omega) \approx 1$ och amplituden är nästan oförändrad: signalen passerar filtret.

c) $y_1(t) = Im\left(\mathcal{S}e^{it}\right) = Im\left(\frac{i}{1+i}(\cos t + i\sin t)\right) = \frac{1}{2}(\cos t + \sin t)$.

d) Eftersom $\mathcal{L}w_2(t) = \frac{2}{s^2+4}$ är

$$y_2(t) = \mathcal{L}^{-1}(H(s)\mathcal{L}w_2(t)) = \mathcal{L}^{-1}\left(\frac{2s}{(s+1)(s^2+4)}\right) =$$

$$\mathcal{L}^{-1}\frac{2}{5}\left(\frac{s+4}{s^2+4} - \frac{1}{s+1}\right) = \frac{2}{5}(\cos 2t + 2\sin 2t - e^{-t})\theta(t).$$

5. a) För $s = 0$ har vi $\int_{-\infty}^{\infty} e^{-0t} f(t)dt = \int_0^\infty f(t)dt$ eftersom $f(t)$ är kausalt och svaret är $\frac{\pi}{2} - \arctan 0 = \frac{\pi}{2}$.

b) $-\frac{d}{ds}\left(\frac{\pi}{2} - \arctan s\right) = \frac{1}{s^2+1}$.

c) $tf(t) = \mathcal{L}^{-1}\frac{1}{s^2+1} = \sin t\theta(t) \Rightarrow f(t) = \frac{\sin t}{t}\theta(t)$.

d) $\frac{\sin t}{t} * 1 = 1 * \frac{\sin t}{t} = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\sin t}{t}dt = 2\int_0^\infty \frac{\sin t}{t}dt = 2\int_0^\infty f(t)dt = \pi$.

6. Om $X(s) = \mathcal{L}(x(t)\theta(t)), Y(s) = \mathcal{L}(y(t)\theta(t))$, har vi efter multiplikation med $\theta(t)$:

$$X + \frac{s}{s^2+1}X = Y \Rightarrow \frac{Y}{X} = \frac{s^2+s+1}{s^2+1}.$$

Om $F(s) = \mathcal{L}(f(t)\theta(t))$ har vi:

$$X = Y + F \cdot Y \Rightarrow \frac{X}{Y} = 1 + F \Rightarrow$$

$$1 + F = \frac{s^2+1}{s^2+s+1} \Rightarrow F(s) = -\frac{s}{s^2+s+1} = -\frac{s+\frac{1}{2}}{(s+\frac{1}{2})^2+\frac{3}{4}} + \frac{\frac{1}{2}}{(s+\frac{1}{2})^2+\frac{3}{4}} \Rightarrow$$

$$f(t) = e^{-\frac{1}{2}t}\left(\frac{1}{\sqrt{3}}\sin\left(\frac{\sqrt{3}}{2}t\right) - \cos\left(\frac{\sqrt{3}}{2}t\right)\right)\theta(t).$$