

Hjälpmedel: utdelat formelblad. Lösningarna skall vara försedda med ordentliga motiveringar. Skriv fullständiga meningar och förklara dina beteckningar. Alla svar skall förklaras så långt som möjligt.

1. Låt $f(t) = (e^{3t} - e^{-3t})\theta(t)$. Beräkna

a) en primitiv funktion till $f(t)$, (0.3)

b) $9f(t) - f''(t)$, (0.3)

c) en kausal lösning till ekvationen $x'' - 9x = \delta(t)$. (0.4)

2. a) Vad menas med att ett system i insignal-utsignalform är linjärt? (0.2)

b) Beräkna faltningen $e^t\theta(t) * \theta(t)$. (0.2)

c) Skriv ner den kvadratiske formen som bestäms av matrisen

$$\begin{bmatrix} 5 & 5 \\ 5 & 5 \end{bmatrix}.$$

Är formen positivt definit? (0.2)

d) Ange sambanden mellan spår, determinant och egenvärden för en matris. (0.2)

e) Beräkna den komplexa amplituden för $f(t) = \cos 3t - \sin 3t$. (0.2)

3. a) Beräkna samtliga egenvärden och egenvektorer till matrisen

$$A = \begin{bmatrix} 3 & 1 \\ 1 & 3 \end{bmatrix}.$$

(0.2)

b) Diagonalisera matrisen med hjälp av en ortogonal matris. (0.2)

c) Beräkna exponentialmatrisen e^{At} . (0.3)

d) Lös begynnelsevärdesproblemet

$$\begin{cases} x_1' &= 3x_1 + x_2 \\ x_2' &= x_1 + 3x_2 \end{cases}, \quad x_1(0) = 2, x_2(0) = 1.$$

(0.3)

V.g. vänd!

4. I ett kausalt linjärt tidsinvariant system beskrivs sambandet mellan insignal $w(t)$ och utsignal $y(t)$ av ekvationen

$$y''(t) + 3y'(t) + 2y(t) = w'(t) + 2w(t).$$

- a) Bestäm systemets överföringsfunktion och impulssvar. (0.2)
- b) Är systemet stabilt? (0.2)
- c) Ange utsignalen $y_1(t)$ om insignalen är $w_1(t) = \sin 2t \theta(t)$. (0.3)
- d) Ange utsignalen $y_1(t)$ om insignalen är $w_2(t) = \sin 2t$. (0.3)
5. En reell $n \times n$ matris A har exponentialmatrisen $B = e^{At}$. Det är känt att för några i, j gäller att $b_{ij} = \cos t + t - 1$. Bestäm och motivera vilka av följande påståenden är sanna:
- a) $n > 2$. (0.2)
- b) $i = j$. (0.2)
- c) Matrisen A är inverterbar. (0.2)
- d) Matrisen A är diagonaliserbar. (0.2)
- e) Matrisen A är symmetrisk. (0.2)

6. Bestäm en funktion $f(x)$ sådan att

$$f(x) + 2 \int_0^x f'(x-y) \sin(2y) dy = e^{-2x}$$

för $x > 0$ och $f(0) = 1$.

LYCKA TILL!