LUNDS TEKNISKA HÖGSKOLA
MATEMATIK

TENTAMENSSKRIVNING
Tillämpad matematik – lösningar
2009–03–13

1. a) Vi börjar från det karakteristiska polynomet

$$p_A(\lambda) = \begin{vmatrix} \lambda-2 & -5 \\ -1 & \lambda+2 \end{vmatrix} = (\lambda-2)(\lambda+2)-5 = \lambda^2-9.$$

$$\lambda^2 - 9 = 0 \Rightarrow \lambda_1 = 3, \lambda_1 = -3.$$

För $\lambda_1 = 3$ har vi:

$$\begin{cases} x - 5y = 0 \\ -x + 5y = 0 \end{cases} \Rightarrow y = t,\ x = 5t,\ \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = t\begin{pmatrix} 5 \\ 1 \end{pmatrix},\ t \neq 0.$$

För $\lambda_1 = -3$ har vi:

$$\begin{cases} -5x - 5y = 0 \\ -x - y = 0 \end{cases} \Rightarrow y = t,\ x = -t,\ \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = t\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix},\ t \neq 0.$$

Svar: $\lambda_1 = 3$ med egenvektorer $t(5,1)^T,\ t \neq 0$ och $\lambda_1 = -3$ med egenvektorer $t(-1,1)^T,\ t \neq 0$.

b) Matrisen A är diagonaliserbar med hjälp av

$$S = \begin{pmatrix} 5 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix},\ S^{-1}AS = D = \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 0 & -3 \end{pmatrix}.$$

Eftersom

$$e^{Dt} = \begin{pmatrix} e^{3t} & 0 \\ 0 & e^{-3t} \end{pmatrix},\ S^{-1} = \frac{1}{6}\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 5 \end{pmatrix},$$

har vi

$$B(t) = e^{At} = Se^{Dt}S^{-1} = \begin{pmatrix} 5 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} e^{3t} & 0 \\ 0 & e^{-3t} \end{pmatrix}\frac{1}{6}\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 5 \end{pmatrix} =$$

$$\frac{1}{6}\begin{pmatrix} 5e^{3t}+e^{-3t} & 5e^{3t}-5e^{-3t} \\ e^{3t}-e^{-3t} & e^{3t}+5e^{-3t} \end{pmatrix}.$$

c)
$$e^{A(t)}X(0) = \frac{1}{6}\begin{pmatrix} 5e^{3t}+e^{-3t} & 5e^{3t}-5e^{-3t} \\ e^{3t}-e^{-3t} & e^{3t}+5e^{-3t} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 6 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5e^{3t}+e^{-3t} \\ e^{3t}-e^{-3t} \end{pmatrix}.$$

Svar: $x = 5e^{3t}+e^{-3t}, y = e^{3t}-e^{-3t}$.

d) Eftersom $= S^{-1}B(t)S = e^{Dt}$ är en diagonalmatris är $B(t)$ diagonaliserbar för alla t.

2.

a) Eftersom

$$K = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & 0 \\ 2 & -3 & 4 & 0 \\ 0 & 4 & -3 & 2 \\ 0 & 0 & 2 & a \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 3 \\ 3 \\ 2+a \end{pmatrix} = 3 \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ \frac{2+a}{3} \end{pmatrix}.$$

ser vi att $2 + a = 3 \Rightarrow a = 1$.

b) $\sum \lambda_i = \operatorname{tr} K = 1 - 3 - 3 + 1 = -4$.

c) $f(x) = x^T K x = x_1^2 + 4x_1x_2 - 3x_2^2 + 8x_2x_3 - x_3^2 + 4x_3x_4 + x_4^2$. Eftersom spåret är negativt är minst ett av egenväredena negatvt och formen är inte positivt definit. Man kan ser det även direkt: $f((0,1,0,0)^T) = -3 < 0$.

d) Eftersom alla egenvärde hos en symmetrisk matris är reella kan inte $-2+i$ vara ett egenvärde till K.

3. a) Se boken!

b) A är en ortogonal matris om $A^T = A^{-1}$. För kvadratiska matriser är det ekvivalent med att skriva $A^T A = I$ (men man måste säga att A är en kvadratisk matris).

c) Derivatan av stegsvaret är impulssvaret.

d)

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Vi har $\lambda_1 = \lambda_2 = 0$. Om $S^{-1}AS$ är lika med

$$D = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = O \Rightarrow A = SOS^{-1} = O,$$

vilket är motsägelse som visar att A inte är diagonaliserbar.

e)

$$\operatorname{Im}\left(\frac{1}{2+2i}e^{i2t}\right) = \operatorname{Im}\left(\frac{(2-2i)(\cos 2t + i\sin 2t)}{2^2+2^2}\right) = \frac{\sin 2t - \cos 2t}{4}.$$

Alternativ lösning: efterssom amplitudfunktionen är $A(\omega) = \left|\frac{1}{2+i\omega}\right| = \frac{1}{\sqrt{4+\omega^2}}$ och fasfunktionen är $\phi(\omega) = \arg\left(\frac{1}{2+i\omega}\right) = -\arctan(\omega/2)$ får vi för $\omega = 2$:

$$A(2)\sin(2t + \phi(2)) = \frac{1}{\sqrt{8}}\sin(2t - \arctan(1)) = \frac{1}{\sqrt{8}}\sin(2t - \pi/4).$$

Laplacetransformen går inte att använda här (men den kunde användas för $\sin 2t\theta(t)$ i stället för $\sin 2t$).

4. a) Eftersom $h(t) * \cos 3t\theta(t) = \sin 3t\theta(t)$ har vi:

$$H(s)\frac{s}{s^2+9} = \frac{3}{s^2+9} \Rightarrow H(s) = \frac{3}{s} \Rightarrow h(t) = 3\theta(t).$$

Svar: Impulssvaret är $h(t) = 3\theta(t)$. Överföringsfunktionen är $H(s) = \frac{3}{s}$.

b) Systemet är inte stabilt därför att $H(s)$ har en pol lika med 0.

c) Eftersom $\mathcal{L}f(t) = \frac{3}{s^2+9}$ är svaret lika med

$$\mathcal{L}^{-1}\left(H(s) \cdot \frac{3}{s^2+9}\right) = \mathcal{L}^{-1}\left(\frac{9}{s(s^2+9)}\right) =$$

$$\mathcal{L}^{-1}\left(\frac{1}{s} - \frac{s}{s^2+9}\right) = \theta(t) - \cos 3t\theta(t).$$

Svar: $(1 - \cos 3t)\theta(t)$

5.

a) Vi ser att $f(t) = t\theta(t-1)$. Eftersom $F(t) = \frac{t^2}{2}$ är en primitiv till t är

$$(F(t) - F(1))\theta(t-1) = \left(\frac{t^2}{2} - \frac{1}{2}\right)\theta(t-1) = \frac{t^2-1}{2}\theta(t-1)$$

en primitiv till $f(t)$.

b) Vi har:

$$f'(t) = t'\theta(t-1) + t\theta'(t-1) = \theta(t-1) + t\delta(t-1) = \theta(t-1) + \delta(t-1)$$

och $f''(t) = \delta(t-1) + \delta'(t-1)$.

c) Låt $g = f * f'$. Eftersom

$$\mathcal{L}f(t) = -\frac{d}{ds}\mathcal{L}\theta(t-1) == -\frac{d}{ds}\left(\frac{e^{-s}}{s}\right) = \frac{e^{-s}(1+s)}{s^2}$$

är

$$\mathcal{L}f'(t) = \frac{e^{-s}(1+s)}{s} \Rightarrow \mathcal{L}g(t) = \frac{e^{-s}(1+s)}{s^2} \cdot \frac{e^{-s}(1+s)}{s} = \frac{e^{-2s}}{s^3} + 2\frac{e^{-2s}}{s^2} + \frac{e^{-2s}}{s} \Rightarrow$$

$$g(t) = \frac{1}{2}(t-2)^2\theta(t-2) + 2(t-2)\theta(t-2) + \theta(t-2) = \frac{t^2-2}{2}\theta(t-2).$$

6. Vi skriver om ekvationen som

$$f(t)\theta(t) + e^{2t}\theta(t) = 2\theta(t)\int_0^t f(\tau)\sin 2(t-\tau)d\tau = f(t)\theta(t) * \sin 2t\theta(t),$$

vilket ger med $F = \mathcal{L}f(t)\theta(t)$ att:

$$F + \frac{1}{s-2} = 2F\frac{2}{s^2+4} \Rightarrow F = \frac{-(s^2+4)}{s^2(s-2)} = \frac{1}{s} + \frac{2}{s^2} - \frac{2}{s-2} \Rightarrow$$

$$f(t)\theta(t) = \theta(t) + 2t\theta(t) - 2e^{2t}\theta(t) \Rightarrow f(x) = 1 + 2x - 2e^{2x}.$$