

*Hjälpmedel: utdelat formelblad. Lösningarna skall vara försedda med ordentliga motiveringar. Skriv fullständiga meningar och förklara dina beteckningar. Alla svar skall förklaras så långt som möjligt.*

1. a) Beräkna samtliga egenvärden och egenvektorer till matrisen

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 5 \\ 1 & -2 \end{bmatrix}. \quad (0.3)$$

- b) Beräkna exponentialmatrisen  $B(t) = e^{At}$ . (0.4)

- c) Lös begynnelsevärdesproblemet

$$\begin{cases} x' = 2x + 5y \\ y' = x - 2y, \end{cases} \quad x(0) = 6, y(0) = 0. \quad (0.2)$$

- d) Är matrisen  $B(t)$  diagonaliserbar för alla  $t$ ? (0.1)

2. Betrakta matrisen

$$K = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 & 0 \\ 2 & -3 & 4 & 0 \\ 0 & 4 & -3 & 2 \\ 0 & 0 & 2 & a \end{bmatrix}.$$

- a) Bestäm  $a$  om  $[1, 1, 1, 1]^T$  är en egenvektor. (0.2)

- b) Bestäm egenvärdenas summa. (0.2)

- c) Skriv ner motsvarande kvadratiska form  $f(x) = x^T K x$ . Är formen positivt definit? (0.4)

- d) Är  $-2 + i$  ett egenvärde till  $K$ ? (0.2)

3. a) Vad menas med att ett system  $\mathbf{S}$  i insignal-utsignalform är i) linjärt? ii) kausalt? (0.2)

- b) Definiera begreppet ortogonal matris. (0.2)

- c) Vilka samband finns mellan stegsvar och impulssvar för ett linjärt tidsinvariant system? (0.2)

**V.g. vänd!**

d) Ge ett exempel på en kvadratisk matris som inte är diagonaliserbar (med beviset att den inte är det). (0.2)

e) Vad blir svaret på  $\sin 2t$  i ett linjärt tidsinvariant system om frekvensfunktionen  $H(i\omega)$  är lika med  $\frac{1}{2+i\omega}$ ? (0.2)

4. Systemet  $\mathcal{S}$  är kausalt, linjärt och tidsinvariant. Om man sänder in signalen  $w(t) = \cos 3t \theta(t)$  så kommer signalen  $y(t) = \sin 3t \theta(t)$  ut.

a) Bestäm systemets impulssvar och överföringsfunktion. (0.4)

b) Är systemet stabilt? (0.2)

c) Ange utsignalen om insignalen är  $f(t) = \sin 3t \theta(t)$ . (0.4)

5. Låt

$$f(t) = \begin{cases} t, & \text{om } t > 1, \\ 0, & \text{annars.} \end{cases}$$

a) Bestäm en primitiv till  $f(t)$ . (0.3)

b) Beräkna  $f'$  och  $f''$ . (0.3)

c) Bestäm faltningen  $f * f'$ . (0.4)

6. Bestäm en funktion  $f(x)$ , som för  $x > 0$  uppfyller ekvationen

$$f(x) + e^{2x} = 2 \int_0^x f(y) \sin 2(x-y) dy.$$

LYCKA TILL!