Anteckningar om mängdlära

Tomas Persson

Innehåll

Förord

Föreliggande anteckningar är ämnade att belysa grunderna till mängdläran, såsom den utspringer ur det Zermelo–Fraenkelska axiomsystemet med urvalsaxiomet.

Tomas Persson, Lund, 14 april 2018

Satt i Computer modern med LaTeX 2ε

KAPITEL 1

Det Zermelo–Fraenkelska axiomsystemet

1. Element och mängder

Vi inför en relation $\in$, vilken kallas för *tillhör* och lämnas utan definition. Vi säger att A är en *mängd* om det finns ett B sådant att A tillhör B, det vill säga om $A \in B$. Vi säger också att A är ett *element* till B om $A \in B$.

Låt A vara en mängd. För alla val av a och A så är utsagan $a \in A$ antingen sann eller falsk. Om utsagan $a \in A$ är falsk, så skriver vi $a \notin A$.

DEFINITION 1. Om A och B är mängder sådana att $a \in A \Rightarrow a \in B$, så säger vi att A är en *delmängd* till B, och skriver $A \subset B$. Vi säger också att A är innesluten i B och att B omsluter A.

I efterföljande avsnitt i detta kapitel kommer vi att införa axiom, vilka vi benämner axiom 1–9. Dessa är väsentligen de axiom som utgör det Zermelo–Fraenkelska axiomsystemet. Vi kommer alltid att anta att dessa axiom gäller, och nämner därför inte detta framöver. I kapitel 3 kommer ytterligare några axiom att införas, och dessa kommer vi inte alltid att antaga som sanna, varför vi i satser alltid kommer att nämna när vi antar att de gäller.

2. Likhet

DEFINITION 2. Om $A \subset B$ och $B \subset A$, så säger vi att A och B är *lika*, och skriver $A = B$.

AXIOM 1 (Axiom om likhet). $(a \in A$ och $a = b) \Rightarrow b \in A$.

Mängder bestäms sålunda av de element de innehåller. Mängden som består av elementet a, och inga andra element, betecknas $\{a\}$. Mängden som består av elementen a och b, och inga andra element, betecknas $\{a, b\}$. På samma sätt införs beteckningen $\{a, b, c\}$ och så vidare.

3. Att bilda mängder

Vi inför nu några axiom som ger oss verktyg att bilda nya mängder.

AXIOM 2 (Axiom om tomma mängden). Det finns en mängd som inte innehåller några element. Denna mängd betecknas $\emptyset$.

Ovanstående axiom kan vi egentligen klara oss utan. Det följer ur axiom 9 nedan att $\emptyset$ är en mängd.

AXIOM 3 (Axiom om par). Om A och B är mängder, så är $\{A, B\}$ en mängd.

Axiom 4 (Axiom om unioner). Om A är en mängd (av mängder) så finns det en mängd som består av de element som är innehållna i någon av mängderna i A, men inga andra element. Denna mängd betecknas $\cup A$.

Axiom 5 (Axiom om potensmängder). Om A är en mängd, så finns det en mängd som består av alla delmängder till A. Denna, så kallade potensmängden till A, betecknas $\mathscr{P}(A)$.

Axiom 6 (Axiom om delmängder). Om A är en mängd, och $\phi(a)$ betecknar en utsaga om a som inte refererar till A, så finns det en mängd B som uppfyller

$$a \in B \quad \Leftrightarrow \quad (a \in A \text{ och } \phi(a)).$$

Vi skriver $B = \{\, a \in A : \phi(a) \,\}$.

Några ord bör ödslas på att närmare nämna vilka utsagor som är tillåtna i axiom 6. Tillåtna utsagor $\phi(a)$ är sådana som kan skrivas med hjälp av ändligt många logiska symboler, såsom $\forall$, $\exists$, $\neg$, $\wedge$ och $\vee$; beteckningar som vi har och kommer att införa, såsom $\in$, $\cup$ och $\cap$; samt variablen a och därutöver endast lokalt förekommande variabler.

Om A och B är mängder, så är $\{A, B\}$ en mängd enligt axiom 3. Vi inför beteckningen $A \cup B = \cup\{A, B\}$, och kallar denna mängd för *unionen* av A och B.

Låt A vara en mängd av mängder. Sätt $B = \cup A$. Då är B en mängd enligt axiom 4, och kallas unionen av A. Låt $\phi(a)$ vara utsagan

$$\phi(a) = \forall C(C \in A \Rightarrow a \in C) = \text{"}a \in C \text{ för alla } C \in A\text{"}.$$

Då är $D = \{\, a \in B : \text{ och } \phi(a) \,\}$ en mängd enligt axiom 6, och kallas för *snittet* av A, samt betecknas $\cap A$. Vi inför beteckningen $E \cap F$ för $\cap\{E, F\}$.

Om A och B är mängder, så är $\{\, a \in A : a \notin B \,\}$ en mängd enligt axiom 6, och betecknas med $A \setminus B$.

4. Regularitet

Följande axiom kommer att ha viss betydelse.

Axiom 7 (Axiom om regularitet). Om A är en mängd, så är antingen $A = \emptyset$, eller så finns det ett $a \in A$ sådant att $a \cap A = \emptyset$.

Axiomet kan uttryckas som att varje mängd har ett minimalt element i den partiella ordningen $\in$. Det följer att det inte finns någon mängd A med $A \in A$, ty då vore $\{A\}$ en mängd sådan att om $a \in \{A\}$ så är $a \cap \{A\} = A \neq \emptyset$.

5. Cartesii produkter

Om A och B är mängder så låter vi (A, B) beteckna det *ordnade paret* av och A och B, vilket definieras av

$$(A, B) = \{\{A\}, \{A, B\}\}.$$

Detta är väldefinierat, ty $\{A, B\}$ är en mängd enligt axiom 3, och då är också $\{\{A\}, \{A, B\}\}$ en mängd enligt samma axiom.

Definitionen medför att $(A, B) = (C, D)$ om och endast om $(A = C$ och $B = D)$.

Antag att A och B är två mängder. Då är (a, b) definierat för varje $a \in A$ och $b \in B$. Eftersom $\{a\}, \{a, b\} \in \mathscr{P}(A \cup B)$, så gäller att $(a, b) \in \mathscr{P}(\mathscr{P}(A \cup B))$. Vi definierar *Cartesii produkt*, eller den *cartesiska produkten*, av A och B som

$$A \times B = \{ c \in \mathscr{P}(\mathscr{P}(A \cup B)) : \phi(c) \},$$

där

$$\begin{aligned} \phi(c) &= \text{"det finns } a \in A \text{ och } b \in B \text{ så att } c = (a, b)\text{."} \\ &= \exists a \exists b (c = (a, b)). \end{aligned}$$

$A \times B$ är en mängd enligt axiom 6.

6. Funktioner

Definition 3. En *funktion* f från en mängd A till en mängd B definieras som en delmängd till $A \times B$ som uppfyller

(1) Om $a \in A$ så finns det ett $b \in B$ sådant att $(a, b) \in f$.
(2) Om $(a, b) \in f$ och $(a, c) \in f$ så är $b = c$.

Skrivsättet $f(a) = b$ betyder att $(a, b) \in f$. Mängden A kallas för *definitionsmängden* till f och B kallas för *målmängden* till f.

Axiom 8 (Axiom om värdemängder). Låt $f\colon A \to B$ vara en funktion. Det finns en mängd B_f sådan att $B_f = \{ b \in B : b = f(a) \text{ för något } a \in A \}$.

Låt $f\colon A \to B$ vara en funktion. Den i axiomet omnämnda mängden B_f kallas för *värdemängden* eller *värdeförrådet* till f. Om mängden

$$C = \{ (b, a) \in B_f \times A : (a, b) \in f \}$$

är en funktion, så säger vi att f är *inverterbar* eller *en-entydig*, och definierar *inversen* till f som funktionen

$$f^{-1} = C.$$

En *bijektion* f är en en-entydig funktion $f\colon A \to B$ sådan att $B_f = B$.

Om $f\colon A \to B$ är en funktion och $C \subset A$, så definieras *restriktionen* av f till C som funktionen

$$f|_C = f \cap (C \times B).$$

Om A och B är två mängder, så finns det en mängd, som består av alla funktioner $f\colon A \to B$. Vi inför beteckningen

$$B^A = \{ f \in \mathscr{P}(\mathscr{P}(A \cup B)) : f\colon A \to B \}.$$

7. Mer om Cartesii produkter

Antag att I är en mängd och att A_i är en mängd för varje $i \in I$. Sätt $A = \bigcup_{i \in I} A_i$. Då definieras *Cartesii produkt* av mängderna A_i som mängden av alla funktioner $f\colon I \to A$ sådana att $f(i) \in A_i$ för alla $i \in I$, och betecknas

$$\bigtimes_{i \in I} A_i.$$

8. Naturliga tal

Om A är en mängd, så är $A \cup \{A\}$ en mängd enligt axiom 3 och 4. Mängden $A \cup \{A\}$ betecknas $S(A)$ och kallas för efterföljaren till A.

Axiom 9 (Axiom om naturliga tal). Det finns en mängd $\mathbb{N}$ som uppfyller följande.

(1) $\emptyset \in \mathbb{N}$.
(2) Om $A \in \mathbb{N}$ så är $S(A) \in \mathbb{N}$.
(3) För varje $A \in \mathbb{N}$, sådant att $A \neq \emptyset$, finns ett $B \in \mathbb{N}$ med $A = S(B)$.

Om A och B är två mängder som uppfyller villkoren i axiom 9, så måste $A = B$. Detta visas som följer. Antag att $C = A \setminus B$ inte är tom. Enligt axiom 7 finns ett $c \in C$ sådant att $c \cap C = \emptyset$. Då kan inte $c = \emptyset$, ty $\emptyset \in A$ och $\emptyset \in B$. Eftersom $c \neq \emptyset$ och $c \in A$, så finns det ett $d \in A$ sådant att $c = S(d) = d \cup \{d\}$, och det gäller därför att $d \in c$. Då måste det gälla att $d \notin C$ ty $c \cap C = \emptyset$. Eftersom $d \notin C$ och $d \in A$ så måste $d \in B$. Det följer att $c = S(d)$ tillhör B, vilket motsäger antagandet att $c \in C = A \setminus B$.

Mängden $\mathbb{N}$ kallas för de naturliga talen. Man plägar ej sällan införa beteckningarna $0 = \emptyset$, $1 = S(0) = \emptyset \cup \{\emptyset\} = \{\emptyset\}$, $2 = S(1) = \{\emptyset, \{\emptyset\}\}$, och så vidare, vilket visar sig praktiskt vid olika tillämpningar, såsom den dubbla italienska bokföringen.

Sats 1 (Induktionsprincipen). *Om $\phi(n)$ betecknar utsagor, sådana att $\phi(0)$ är sann, och $\phi(S(n))$ är sann om $\phi(n)$ är sann, så är $\phi(n)$ sann för varje $n \in \mathbb{N}$.*

Bevis. Låt $A = \{ n \in \mathbb{N} : \phi(n) \text{ är sann } \}$. Då är A en mängd, som uppfyller de två första villkoren i axiom 9. Antag att $\mathbb{N} \setminus A \neq \emptyset$. Enligt axiom 7 finns $n \in \mathbb{N} \setminus A$ sådant att $n \cap (\mathbb{N} \setminus A) = \emptyset$. Tydligen är $n \neq 0$, så $n = S(m)$ för något $m \in \mathbb{N}$. Då gäller att $m \in n = m \cup \{m\}$, så $m \notin \mathbb{N} \setminus A$. Det måste därför gälla att $m \in A$, och sålunda är $n = S(m) \in A$, vilket är en motsägelse. $\square$

KAPITEL 2

Ordinaltal

1. Ordning och reda

Låt A vara en mängd. En *partiell ordning* på A är en relation $\leq$ på A, som uppfyller

(1) För alla $a \in A$ är $a \leq a$.
(2) Om $a \leq b$ och $b \leq a$, så är $a = b$.
(3) Om $a \leq b$ och $b \leq c$, så är $a \leq c$.

En mängd A med en partiell ordning $\leq$ kallas för en *kedja*, eller för *lineärt ordnad*, och ordningen $\leq$ kallas för en *lineär ordning* på A, om det för alla $a, b \in A$ gäller att $a \leq b$ eller $b \leq a$.

Givet en ordning $\leq$, så inför vi relationen $<$ vilken definieras av

$$a < b \quad \Leftrightarrow \quad (a \leq b \text{ och } a \neq b).$$

Vi kallar även $<$ för en ordning. Alternativ kan vi givet en ordning $<$ införa ordningen $\leq$ enligt

$$a \leq b \quad \Leftrightarrow \quad (a < b \text{ eller } a \neq b).$$

Låt A vara en mängd med en partiell ordning $\leq$. Ett element $a \in A$ kallas för *minimalt* om $b \leq a$ medför att $a = b$. Ett element a kallas ett *minimum*, eller ett *minsta element* om $a \leq b$ håller för alla $b \in A$. På motsvarande sätt definieras maximum och maximalt: Ett element $a \in A$ kallas för *maximalt* om $a \leq b$ medför att $a = b$. Ett element a kallas ett *maximum*, eller ett *största element* om $b \leq a$ håller för alla $b \in A$.

Om A är en partiellt ordnad mängd och $B \subset A$, så är B partiellt ordnad på ett naturligt sätt.

En mängd A kallas för *välordnad* om A är lineärt ordnad och varje icke-tom delmängd till A har ett minsta element. Observera att vi kan ekvivalent definiera att en mängd A kallas för välordnad om A lineärt ordnad och varje icke-tom delmängd till A har ett minimalt element, ty i lineärt ordnade mängder är ett element minimalt om och endast om det är ett minsta element.

2. Ordinaltal

Definition 4. En mängd A kallas för ett *ordinaltal* om $\in$ utgör en välordning på A, och om

$$(a \in b \text{ och } b \in A) \quad \Rightarrow \quad a \in A,$$

det vill säga, om $b \in A$ så är $b \subset A$.

Tydligen är $\emptyset$ och $\mathbb{N}$ ordinaltal. I samband med ordinaltal används beteckningen $\omega = \mathbb{N}$.

Sats 2. *Om α är ett ordinaltal, så är $S(\alpha)$ ett ordinaltal. Om $\beta \in \alpha$ och α är ett ordinaltal, så är β ett ordinaltal.*

Bevis. Antag att α är ett ordinaltal. Då är $S(\alpha) = \alpha \cup \{\alpha\}$ välordnad, ty α är välordnad.

Om $a \in b \in S(\alpha)$ så är antingen $b \in \alpha$ eller $b = \alpha$. Om $b \in \alpha$ så är $a \in b \in \alpha$ och därmed $a \in \alpha$, varur $a \in S(\alpha)$ genast följer. Om $b = \alpha$ är $a \in \alpha$ och $a \in S(\alpha)$ följer. Detta visar att $S(\alpha)$ är ett ordinaltal.

Låt $\beta \in \alpha$. Då är $\beta \subset \alpha$ ty om $a \in \beta$ så är $a \in \alpha$ enligt definitionen av ordinaltal. Det följer att β är välordnad.

Om $a \in b \in \beta$ så är $a \in b \in \alpha$, varför $a \in \alpha$. Vi har alltså att $a, b, \beta \in \alpha$ och $a \in b \in \beta \in \alpha$. Eftersom $\in$ är en lineär ordning på α, så medför nu $a \in b \in \beta$ att $a \in \beta$. $\square$

Ur sats 2 följer att, eftersom $\emptyset$ och ω är ordinaltal, så är

$$\begin{array}{cccc} \{\emptyset\}, & \{\emptyset, \{\emptyset\}\}, & \{\emptyset, \{\emptyset\}, \{\emptyset, \{\emptyset\}\}, & \dots \\ \omega, & \omega \cup \{\omega\}, & \omega \cup \{\omega\} \cup \{\omega, \{\omega\}\}, & \dots \end{array}$$

ordinaltal.

Sats 3. *Låt α och β vara två ordinaltal med $\alpha \neq \beta$. Då gäller*

$$\begin{aligned} \alpha \subset \beta \quad &\Leftrightarrow \quad \alpha \in \beta, \\ \beta \setminus \alpha \neq \emptyset \quad &\Rightarrow \quad \alpha \subset \beta. \end{aligned}$$

Vidare gäller, att om $\beta \setminus \alpha \neq \emptyset$, så är α det minsta elementet i $\beta \setminus \alpha$.

Bevis. Ur definitionen av ordinaltal följer att om $\alpha \in \beta$ så är $\alpha \subset \beta$. Antag att $\alpha \subset \beta$. Eftersom $\alpha \neq \beta$ är $\beta \setminus \alpha$ icke tom, och dessutom välordnad. Låt a vara det minsta elementet i $\beta \setminus \alpha$. Tag $b \in a$. Eftersom a är det minsta elementet i $\beta \setminus \alpha$ är $b \notin \beta \setminus \alpha$, men $b \in \beta$ varför $b \in \alpha$ måste gälla. Alltså är $a \subset \alpha$.

Tag $c \in \alpha$. Då är $c \in \beta$ och eftersom β är välordnad måste det därför gälla att antingen är $a \in c$, $c \in a$ eller $a = c$. Om $a \in c$ så är $a \in c \in \alpha$ och $a \in \alpha$ gäller vilket är omöjligt. Vidare kan inte $a = c$, ty $a \notin \alpha$. Sålunda måste $c \in a$, vilket visar att $\alpha \subset a$.

Eftersom $a \subset \alpha$ och $\alpha \subset a$ är $a = \alpha$ och $\alpha \in \beta$. Vi har nu visat att $\alpha \subset \beta \Leftrightarrow \alpha \in \beta$.

Antag att $\beta \setminus \alpha$ inte är tom. Låt a vara det minsta elementet i $\beta \setminus \alpha$. Samma resonemang som ovan visar att $a \subset \alpha$. Men $a \notin \alpha$ så enligt ekvivalensen i satsen, måste $a = \alpha$. Alltså gäller $\alpha \in \beta$ och sålunda är $\alpha \subset \beta$. $\square$

Sats 4. *Antag att A är en mängd av ordinaltal. Då är A välordnad av $\in$; $\cup A$ är ett ordinaltal; $\cup A$ är den minsta övre begränsningen till A; och det finns ett ordinaltal som inte tillhör A.*

Bevis. Låt α och β vara två ordinaltal. Det följer ur sats 3 att antingen är $\alpha = \beta$, $\alpha \in \beta$ eller $\beta \in \alpha$. Alltså är $\in$ en lineär ordning på A.

Vi visar att A är välordnad. Låt $B \subset A$. Om $\alpha \in B$ så är antingen $\alpha \cap B$ tom eller icke tom. Om $\alpha \cap B$ är tom, så är α det minsta elementet i B. Om $\alpha \cap B$ inte är tom, så finns ett minsta element $\beta \in \alpha \cap B$ ty α är välordnad eftersom α är ett ordinaltal. Då är β ett minsta element i B, ty om $\gamma \in B$

och $\gamma \in \beta$, så är $\gamma \in \alpha$ eftersom α är ett ordinaltal. Då är $\gamma \in \alpha \cap B$ och $\gamma \in \beta$ vilket motsäger att β är det minsta elementet i $\alpha \cap B$.

Vi visar att $\cup A$ är ett ordinaltal. Om $\alpha \in \beta \in \cup A$ så finns det ett $\gamma \in A$ sådant att $\alpha \in \beta \in \gamma$. Då är $\alpha \in \gamma$ och $\alpha \in \cup A$. Vidare är $\cup A$ välordnad, så $\cup A$ är ett ordinaltal.

Det är klart att $\cup A$ är en övre begränsning till A. Det är den minsta övre begränsningen, ty om β är sådant att $\alpha \in \beta$ för varje $\alpha \in A$, så måste $\cup A \subset \beta$.

Låt $\alpha = S(\cup A)$. Då är α ett ordinaltal och $\alpha \notin A$. □

Ur sats 4 följer omedelbart följande två korollarier.

KOROLLARIUM 1. *Om A är en icke-tom mängd av ordinaltal, så har A ett minsta element i ordningen $\in$.*

KOROLLARIUM 2. *Det finns ingen mängd som består av alla ordinaltal.*

Om α och β är två ordinaltal och $\beta = S(\alpha)$, så kallas β för ett *efterföljande ordinaltal.* Om ett ordinaltal inte är ett efterföljande ordinaltal, så kallas det för ett *gränsordinaltal.* Ordinaltalet $\emptyset$ är det minsta gränsordinaltalet, i den meningen att om A är en mängd av gränsordinaltal, och $\emptyset \in A$, så är $\emptyset$ ett minsta element under ordningen $\in$ på A.

SATS 5 (Transfinit induktion). *Antag att $\phi(\alpha)$ betecknar utsagor sådana att för varje ordinal β gäller att*

$$(\alpha \in \beta \quad \Rightarrow \quad \phi(\alpha) \text{ är sann}) \quad \Rightarrow \quad \phi(\beta) \text{ är sann.}$$

Då är $\phi(\alpha)$ sann för varje ordinaltal α.

BEVIS. Eftersom $\beta = \emptyset$ är ett ordinaltal, och det inte finns något element i $\emptyset$, så måste $\phi(\emptyset)$ vara sann.

Antag att det finns ett ordinaltal sådant att ϕ ej är sant. Låt β vara det minsta sådant ordinaltal. Då är $\phi(\alpha)$ sann för alla $\alpha \in \beta$. Antagandet i satsen ger då att antingen är $\beta = \emptyset$ eller så är $\phi(\beta)$ sann, vilka båda är omöjliga. □

3. Ordningstyper och välordnade mängder

DEFINITION 5. Låt α vara ett ordinaltal. En välordnad mängd A sägs vara av *ordningstyp* α om det finns en bijektion $f \colon \alpha \to A$ som bevarar ordning, det vill säga $\beta \in \gamma$ håller om och endast om $f(\beta) < f(\gamma)$.

SATS 6. *Varje välordnad mängd är av ordningstyp α för något entydigt bestämt ordinaltal α.*

BEVIS. Låt A vara välordnad. Den sökta funktionen f kan definieras induktivt. Låt $f(0)$ vara det minsta elementet i A. Antag att $f(\alpha)$ har definierats och tillhör A. Då definieras $f(S(\alpha))$ som det minsta element i $\{ b \in A : f(\alpha) < b \}$ om sådant finns, eljest definieras $f(S(\alpha)) = A$. Om α är ett gränsordinaltal och $f(\beta)$ har definierats och tillhör A för alla $\beta \in \alpha$, så definieras $f(\alpha)$ som det minsta elementet i $\{ b \in A : f(\beta) < b \text{ om } \beta \in \alpha \}$, såtillvida denna mängd inte är tom, i vilket fall $f(\alpha)$ definieras som A.

Transfinit induktion, sats 5, ger att det finns ett α sådant att $f(\alpha) = A$ och f är definierad för alla ordinaltal som tillhör α. Vi har alltså definierat en funktion $f: \alpha \to A$ som är ordningsbevarande.

Antag att $\{ f(\beta) : \beta \in \alpha \} \neq A$. Låt $a \in A$ vara det minsta elementet i A sådant att det inte finns något $\beta \in \alpha$ med $f(\beta) = a$. Låt $\gamma \in \alpha$ vara det minsta ordinaltal för vilket $f(\gamma) > a$ inte gäller. Enligt definitionen av f är då $f(\gamma) = a$, vilket motsäger valet av a.

Funktionen f är alltså en ordningsbevarande bijektion $f: \alpha \to A$, och alltså är A av ordningstyp α.

Ordinaltalet α måste vara entydigt, ty eljest funnes två ordinaltal $\alpha \in \beta$ och sådan att den ovan konstruerade funktionen $f: \alpha \to \beta$ är inverterbar och ordningsbevarande, och det är lätt att se att i detta fall är $f(\gamma) = \gamma$ för alla $\gamma \in \alpha$. □

Givet en välordnad mängd A, så låter vi $\mathrm{Ord}(A)$ beteckna det till A hörande ordinaltalet, vilket ges av sats 6, och är ordningstypen för A.

4. Ordinaltalsaritmetik

Definition 6 (Addition av ordinaltal). Låt α och β vara två ordinaltal. Då är mängden

$$A = \alpha \times \{0\} \cup \beta \times \{1\}$$

välordnad av ordningen

$$(\beta, m) < (\gamma, n) \quad \Leftrightarrow \quad (m < n \text{ eller } (m = n \text{ och } \beta \in \gamma)),$$

och $\alpha + \beta$ definieras som ordinaltalet $\mathrm{Ord}(A)$.

Mer allmänt, om γ är ett ordinaltal, och $\{ \alpha_\beta : \beta \in \gamma \}$ är en mängd av ordinaltal, så definieras summan

$$\sum_{\beta \in \gamma} \alpha_\beta$$

som ordinaltalet $\mathrm{Ord}(A)$, där

$$A = \bigcup_{\beta \in \gamma} \alpha_\beta \times \{\beta\},$$

försedd med samma välordning som ovan.

Det följer ur definitionen, att om $\alpha = S(\beta)$ är ett ordinaltal, så är $\alpha = \beta + 1$. Om β är ett gränsordinaltal, så gäller att $\alpha + \beta = \bigcup_{\gamma \in \beta} (\alpha + \gamma)$.

Som exempel har vi att

$$\begin{aligned} \omega &= \{0, 1, 2, \ldots\} = \{\emptyset, \{\emptyset\}, \{\emptyset, \{\emptyset\}\}, \ldots\} \\ \omega + 1 &= \{0, 1, 2, \ldots, \omega\}, \end{aligned}$$

men det kan vara lämpligt att tänka på $\omega + 1$ som vore det mängden A i definition 6,

$$\omega + 1 = \mathrm{Ord}(\{(0,0), (1,0), (2,0), \ldots, (0,1)\}).$$

Ur definitionen för addition av ordinaltal följer omedelbart följande lemma.

LEMMA 1. *Låt α och β vara två ordinaltal. Då är*

$$\alpha + \beta = \mathrm{Ord}(\alpha) + \mathrm{Ord}(\beta) = \mathrm{Ord}(\alpha + \beta).$$

Vi visar följande lemma, som vi kommer att få användning för längre fram i detta kapitel.

LEMMA 2. *Om $\alpha \in \beta$ så finns ett entydigt γ sådant att $\alpha + \gamma = \beta$.*

BEVIS. Det gäller att $\beta = \alpha \cup (\beta \setminus \alpha)$. Vidare är $\beta \setminus \alpha \subset \beta$ och $\beta \setminus \alpha$ är välordnad. Låt $\gamma = \mathrm{Ord}(\beta \setminus \alpha)$. Tydligen gäller enligt lemma 1 att $\alpha + \gamma = \beta$.

Slutligen måste γ vara entydig, ty eljest funnes $\gamma_1 \in \gamma_2$ sådana att $\alpha + \gamma_1 = \alpha + \gamma_2$. Resonemanget ovan ger då att

$$\mathrm{Ord}((\alpha + \gamma_1) \setminus \alpha) = \mathrm{Ord}((\alpha + \gamma_2) \setminus \alpha).$$

Men detta ger att $\mathrm{Ord}(\gamma_1) = \mathrm{Ord}(\gamma_2)$ vilket direkt motsäger att $\gamma_1 \in \gamma_2$. □

DEFINITION 7 (Multiplikation av ordinaltal). Låt α och β vara två ordinaltal. Då definieras $\alpha \cdot \beta$ som

$$\alpha \cdot \beta = \sum_{\gamma \in \beta} \alpha.$$

Det följer ur definitionerna av addition och multiplikation, att om α och β är två ordinaltal, så är $\alpha \cdot (\beta + 1) = (\alpha \cdot \beta) + \alpha$. Om β är ett gränsordinaltal, så är $\alpha \cdot \beta = \bigcup_{\gamma \in \beta} (\alpha \cdot \gamma)$.

Addition och multiplikation av ordinaltal är inte kommutativt. Som exempel kan

$$\begin{aligned} 1 + \omega &= \omega, & \qquad \omega &\in \omega + 1, \\ 2 \cdot \omega &= \omega, & \qquad \omega &\in \omega \cdot 2, \end{aligned}$$

anföras. Dock gäller följande.

SATS 7. *Om α, β och γ är ordinaltal, så gäller att*

$$\begin{gathered} (\alpha + \beta) + \gamma = \alpha + (\beta + \gamma), \\ (\alpha \cdot \beta) \cdot \gamma = \alpha \cdot (\beta \cdot \gamma), \\ \alpha \cdot (\beta + \gamma) = \alpha \cdot \beta + \alpha \cdot \gamma. \end{gathered}$$

Slutligen ger vi följande definition.

DEFINITION 8 (Exponentiering av ordinaltal). Låt α och β vara två ordinaltal. Då definieras α^β förmedelst transfinit induktion enligt följande. Låt $\alpha^0 = \alpha^\emptyset = 1 = \{\emptyset\}$. Om β är ett efterföljande ordinaltal och $\beta = S(\gamma) = \gamma + 1$, så definieras

$$\alpha^\beta = \alpha^\gamma \cdot \alpha.$$

Om β är ett gränsordinaltal, så definieras α^β

$$\alpha^\beta = \bigcup_{\gamma < \beta} \alpha^\gamma.$$

5. Normala funktioner och Cantors normalform

DEFINITION 9. Låt α och β vara två ordinaltal. En funktion $f\colon \alpha \to \beta$ kallas *normal* om f bevarar ordning och om det för varje gränsordinaltal $\gamma \in \alpha$ gäller att

$$f(\gamma) = \bigcup_{\delta \in \gamma} f(\delta).$$

SATS 8. *Låt α vara ett ordinaltal, och definiera två funktioner genom $f(\beta) = \alpha^{\beta}$ och $g(\beta) = \alpha \cdot \beta$. Då är f och g normala funktioner.*

BEVIS. Detta följer direkt ur definitionerna för exponentiering och multiplikation av ordinaltal. □

SATS 9. *Antag att $f\colon \alpha \to \beta$ är normal och att $\gamma \in \bigcup_{a \in \alpha} f(a)$. Om $f(\emptyset) \in \gamma$ eller $f(\emptyset) = \gamma$, så finns det ett största δ sådant att $f(\delta) \in \gamma$ eller $f(\delta) = \gamma$.*

Lägg märke till att

$$(f(\delta) \in \gamma \text{ eller } f(\delta) = \gamma) \quad \Leftrightarrow \quad f(\delta) \in S(\gamma).$$

BEVIS. Låt ε vara det minsta ordinaltalet sådant att $\gamma \in f(\varepsilon)$.

Om ε är ett efterföljande ordinaltal, säg $\varepsilon = S(\delta)$, så är δ det största ordinaltalet sådant att $f(\delta) \in S(\gamma)$.

Om ε är ett gränsordinaltal, så är $f(\zeta) \in S(\gamma)$ för alla $\zeta \in \varepsilon$ och eftersom f är normal är

$$f(\varepsilon) = \bigcup_{\zeta \in \varepsilon} f(\zeta).$$

Men eftersom $f(\zeta) \in S(\gamma)$ för all $\zeta \in \varepsilon$ följer det att $f(\varepsilon) \in S(\gamma)$ vilket motsäger att $\gamma \in f(\varepsilon)$. Alltså kan ε inte vara ett gränsordinaltal. □

I likhet med naturliga tal, som kan framställas på decimalform, kan varje ordinaltal framställas på vad som kallas för Cantors normalform, och är innebörden i följande sats.

SATS 10. *Låt α vara ett ordinaltal som är större än 0. Då finns ett naturligt tal n, naturliga tal $c_1, c_2, \ldots, c_n \geq 1$ och ordinaltal $\beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_n$ sådana att $\alpha \geq \beta_1 > \beta_2 > \cdots > \beta_n$ och*

$$\alpha = \omega^{\beta_1} \cdot c_1 + \omega^{\beta_2} \cdot c_2 + \cdots + \omega^{\beta_n} \cdot c_n.$$

BEVIS. Betrakta ett ordinaltal $\alpha \neq \emptyset$ och låt β_1 vara det största ordinaltalet sådant att $\omega^{\beta_1} \in S(\alpha)$, vilket finns enligt satserna 8 och 9. Låt nu på samma sätt c_1 vara det största ordinaltalet sådant att $\omega^{\beta_1} \cdot c_1 \in S(\alpha)$. Då måste $c_1 \in \omega$ ty annars kunde β_1 ha valts större. Vidare är $c_1 \neq 0$, ty $\omega^{\beta_1} \cdot 1 = \omega^{\beta_1} \in S(\alpha)$.

Låt nu α_2 vara det enligt lemma 2 entydigt bestämda ordinaltalet sådant att $\omega^{\beta_1} \cdot c_1 + \alpha_2 = \alpha$. Då är $\alpha_2 \in \alpha$.

Om $\alpha_2 = \emptyset$ är vi färdiga. Annars fortsätter vi som tidigare och skriver $\alpha_2 = \omega^{\beta_2} \cdot c_2 + \alpha_3$, och så vidare. Enligt korollarium 1 måste detta sluta efter ändligt många steg. □

6. Ordinaltalen ε_α

Det finns ordinaltal α sådana att $\alpha = \omega^\alpha$. Det minsta sådant ordinaltal betecknas ε_0. Låt $\beta_0 = 1$ och definiera $\beta_{n+1} = \omega^{\beta_n}$ för $n \in \omega$. Låt

$$\varepsilon_0 = \bigcup_{n\in\omega} \beta_n.$$

Då är $\varepsilon_0 = \omega^{\varepsilon_0}$. Vidare gäller att om $0 \neq \beta \in \varepsilon_0$ så är $\beta_n \in \beta \in \beta_{n+1}$ för något $n \in \omega$ och det följer att $\beta \in \omega^\beta$. Sålunda är ε_0 det minsta ordinaltalet sådant att $\varepsilon_0 = \omega_0^\varepsilon$.

Låt nu α vara ett ordinaltal, och antag att ε_β har definierats för alla $\beta \in \alpha$ och uppfyller $\varepsilon_\beta = \omega^{\varepsilon_\beta}$. Om $\alpha = S(\beta)$, så definierar vi

$$\varepsilon_\alpha = \bigcup_{n\in\omega} \varepsilon_\beta^{\beta_n},$$

där β_n i likhet med ovan definieras så att $\beta_0 = 1$ och $\beta_{n+1} = \varepsilon_\beta^{\beta_n}$.

Om α är ett gränsordinaltal, så definieras ε_α enligt

$$\varepsilon_\alpha = \bigcup_{\beta\in\alpha} \varepsilon_\beta.$$

Då gäller följande. Om ε är sådant att $\omega^\varepsilon = \varepsilon$, så är $\varepsilon = \varepsilon_\alpha$ för något α. För varje $\beta \in \varepsilon_\alpha$ är $\varepsilon_\alpha = \beta^{\varepsilon_\alpha}$.

7. Problem

(1) Bevisa sats 7.
(2) Generalisera sats 10. (Byt ut ω.)
(3) Visa att $\varepsilon = \omega^\varepsilon$ om och endast om $\varepsilon = \varepsilon_\alpha$ för något α.
(4) Visa att om $\beta \in \varepsilon_\alpha$, så är $\varepsilon_\alpha = \beta^{\varepsilon_\alpha}$.

KAPITEL 3

Urvalsaxiomet och dess ekvivalenter

Vi presenterar nedan fyra axiom, vilka vi ska visa är ekvivalenta. Vi kommer framöver inte alltid att antaga att dessa axiom gäller, och när vi antager att de gäller kommer det att nämnas.

Axiom 10 (Urvalsaxiomet). Låt $I \neq \emptyset$ och antag att $A_i \neq \emptyset$ för varje $i \in I$. Då är $\bigtimes_{i \in I} A_i \neq \emptyset$.

Varje funktion $f \in \bigtimes_{i \in I} A_i \neq \emptyset$ kallas för ett *urval*.

Axiom 11 (Välordningsprincipen). Låt A vara en mängd. Då finns det en välordning på A.

Att det finns en välordning på A kan uttryckas som att det finns ett ordinaltal α och en bijektion $f \colon \alpha \to A$.

Axiom 12 (Zorns lemma). Om A är partiellt ordnad och varje icke-tom kedja i A har en övre begränsning i A, så har A ett största element.

Axiom 13 (Hausdorffs maximumprincip). Om A är partiellt ordnad, så kan varje icke-tom kedja i A utvidgas till en största kedja i A, det vill säga, om $B \subset A$ och B är en icke-tom kedja, så finns det en kedja C sådan att $B \subset C \subset A$ och om D är en kedja med $B \subset D$ så är $D \subset C$.

Sats 11. *Axiomen 10–13 är ekvivalenta.*

Bevis. *Vi visar först att urvalsaxiomet medför välordningsprincipen.* Låt A vara en mängd och låt $I = \mathscr{P}(A) \setminus \{A\}$. Om $B \in I$, så låter vi C_B definieras av $C_B = A \setminus B$. För varje $B \in I$ är C_B en icke-tom mängd. Urvalsaxiomet ger att det finns en funktion $f \colon I \to A$ sådan att

$$f \in \bigtimes_{B \in I} C_B.$$

Vi definierar nu en funktion h. Målet är att visa att det finns ett ordinaltal α så att $h \colon \alpha \to A$ är en bijektion. Detta görs med hjälp av urvalsaxiomet och transfinit induktion: Om $h(\gamma)$ har definierats för alla $\gamma \in \beta$ och $\{\, h(\gamma) : \gamma \in \beta \,\}$ inte är hela A, så använder vi urvalsaxiomet, genom funktionen f, för att välja ett element $a \in A$ och definiera $h(\beta) = a$. Nu följer detaljerna.

Låt $h(\emptyset) = f(\emptyset)$. Antag att $h(\beta)$ är definierad för alla ordinaltal $\beta \in \alpha$. Då definieras $h(\alpha)$ som

$$h(\alpha) = f(\{\, h(\beta) : \beta \in \alpha \,\})$$

om $\{\, h(\beta) : \beta \in \alpha \,\} \neq A$ och annars definieras $h(\alpha) = \{A\}$.

Det gäller nu att det finns ett ordinaltal α sådant att $h(\alpha) = \{A\}$, ty om så inte vore fallet, vore h inverterbar och h^{-1} en funktion från

$$\{ a \in A : \exists\beta(a = h(\beta)) \}$$

till ordinaltalen sådan att värdemängden utgörs av alla ordinaltal, vilket är omöjligt, ty det finns ingen mängd som består av alla ordinaltal.

Låt nu α vara det minsta ordinaltalet för vilket $h(\alpha) = \{A\}$. Då definierar restriktionen av h till α en välordning på A, och alltså kan A välordnas.

Vi visar nu att välordningsprincipen medför Zorns lemma. Låt A vara en partiellt ordnad mängd, sådan att varje icke-tom kedja har en övre begränsning i A. Enligt välordningsprincipen finns det ett ordinaltal α och en bijektion $f\colon \alpha \to A$.

Vi definierar en funktion $g\colon \alpha \to A$ genom transfinit induktion. Antag att g har definierats för alla ordinaltal i β, där $\beta \in \alpha$. Om mängden

$$\{ g(\gamma) : \gamma \in \beta \}$$

inte är hela A, så finns det ett minsta ordinaltal δ sådant att $f(\delta) > a$ för alla $a \in \{ g(\gamma) : \gamma \in \beta \}$, och vi definierar $g(\beta) = f(\delta)$. Annars definieras $g(\beta) = f(\emptyset)$.

Ur konstruktionen följer att $B = \{ g(\beta) : \beta \in \alpha \}$ är en kedja, och B har därför en övre begränsning b. Då måste b vara maximal i A, ty eljest finns $c = f(\gamma) > b$, och då är $c > a$ för alla $a \in \{ g(\beta) : \beta \in \gamma \}$, varur följer att $c = g(\gamma) \in A$ samt motsägelsen $c \leq b$.

Vi visar nu att Zorns lemma medför Hausdorffs maximumprincip. Låt A vara partiellt ordnad, och antag att $B \subset A$ är en icke tom kedja. Låt C vara mängden av alla kedjor i A som omsluter B. Inklusion definierar en partiell ordning på C. Enligt Zorns lemma har C ett maximalt element, vilket är den till A sökta maximala kedjan.

Slutligen visar vi att Hausdorffs maximumprincip medför urvalsaxiomet. Låt $\{ A_i : i \in I \}$ vara en icke tom mängd av icke tomma mängder. Sätt $A = \bigcup_i A_i$. Låt F vara mängden av alla funktioner $f\colon I_f \to A$ sådana att $I_f \subset I$ och $f(i) \in A_i$ för alla $i \in I_f$.

Inklusion definierar en partiell ordning på F. Hausdorffs maximumprincip ger att det finns en maximal kedja B i F. Låt $f = \cup B \in F$.

Nu måste $f \in \bigtimes_{i\in I} A_i$, ty om I_f inte är hela I, så finns det ett $i \in I \setminus I_f$ och ett $a \in A_i$, och då är $f \cup \{(i, a)\}$ ett element i F och $f \cup \{(i, a)\} \supset g$ för alla $g \in B$ vilket motsäger att B är maximal. $\square$

KAPITEL 4

Kardinaltal

1. Mäktighet och Schröder–Bernsteins sats

DEFINITION 10. Vi säger att två mängder A och B är *lika mäktiga* eller har samma *mäktighet* om det finns en bijektion $f\colon A \to B$.

SATS 12 (Schröder–Bernstein). *Om A och B är två mängder och $f\colon A \to B$ och $g\colon B \to A$ är två en-entydiga funktioner, så är A och B lika mäktiga.*

BEVIS. Vi definierar rekursivt

$$\begin{aligned} A_0 &= A, & B_0 &= B, \\ A_n &= g(B_{n-1}), & B_n &= f(A_{n-1}). \end{aligned}$$

Vidare sätter vi

$$\tilde{A}_n = A_n \setminus A_{n+1}, \qquad \tilde{B}_n = B_n \setminus B_{n+1}.$$

Nu gäller för varje $n < \omega$ att

$$f(\tilde{A}_n) = \tilde{B}_{n+1} \qquad \text{och} \qquad g(\tilde{B}_n) = \tilde{A}_{n+1},$$

ty eftersom f är inverterbar är $f(\tilde{A}_n) = f(A_n \setminus A_{n+1}) = f(A_n) \setminus f(A_{n+1}) = B_{n+1} \setminus B_{n+2} = \tilde{B}_{n+1}$, och motsvarande gäller för g.

Sätt $\tilde{A} = \bigcap_{n<\omega} A_n$ och $\tilde{B} = \bigcap_{n<\omega} B_n$. Då är $f(\tilde{A}) = \tilde{B}$ och $g(\tilde{B}) = \tilde{A}$. Vidare gäller för varje $n < \omega$ att $\tilde{A} \cap \tilde{A}_n = \emptyset$ och $\tilde{B} \cap \tilde{B}_n = \emptyset$, samt gäller att $\tilde{A}_n \cap \tilde{A}_m = \emptyset$ och $\tilde{B}_n \cap \tilde{B}_m = \emptyset$ om $n < m < \omega$.

Vi definierar nu en funktion $h\colon A \to B$ med $h^{-1}\colon B \to A$. Tag $a \in A$. Om $a \in \tilde{A}$ så definierar vi $h(a) = f(a)$, annars finns det ett $n < \omega$ så att $a \in \tilde{A}_n$. Om $n = 2m$ för något m, så definierar vi $h(a) = f(a)$ och annars är $n = 2m + 1$ för något m och vi definierar $h(a) = g^{-1}(a)$. □

DEFINITION 11. Antag att A och B är mängder. Vi säger att A är mäktigare än B om det finns en en-entydig funktion $f\colon B \to A$ och A inte är lika mäktig som B. Vi skriver $A \prec B$ om A är mäktigare än B och $A \preceq B$ om det finns en en-entydig funktion $f\colon A \to B$. Om A och B är lika mäktiga, så skriver vi $A \sim B$.

Det gäller alltså att $A \preceq B$ om och endast om antingen $A \prec B$ eller $A \sim B$.

Relationen $A \preceq B$ utgör en partiell ordning på varje mängd. Om A och B är två mängder, så kan vi inte utan urvalsaxiomet visa att antingen är $A \preceq B$ eller så är $B \preceq A$. Utan urvalsaxiomet går det alltså inte att visa att relationen $\preceq$ utgör en lineär ordning. Vi kommer i nästföljande avsnitt definiera kardinaltal och visa att om urvalsaxiomet antas gälla, så är relationen $\preceq$ en lineär ordning.

2. Kardinaltal

Om A är en mängd som är lika mäktig som ordinaltalet α, så är

$$\{\,\beta : \beta \in S(\alpha) \text{ och } \beta \text{ är lika mäktig som } A\,\}$$

en en icke-tom mängd av ordinaler, och innehåller därför ett minsta ordinaltal enligt korollarium 1. Vi kan därför ge följande definition.

DEFINITION 12 (Kardinaltal). Antag att A är en mängd och att det finns ett ordinaltal α som är lika mäktigt som A. Då definieras *kardinaltalet* till A som det minsta ordinaltalet som är lika mäktigt som A, och betecknas $|A|$.

Det är klart att om A är en oändlig mängd som har ett ordinaltal $|A|$, så är $|A|$ en gränsordinal.

SATS 13. *Antag att urvalsaxiomet gäller. Då har varje mängd ett kardinaltal.*

BEVIS. Eftersom urvalsaxiomet, enligt sats 11, är ekvivalent med välordningsprincipen, så är varje mängd lika mäktig som något ordinaltal. □

Vi skriver $|A| < |B|$ om $|A| \in |B|$, och vi skriver $|A| \leq |B|$ om $|A| < |B|$ eller $|A| = |B|$.

KOROLLARIUM 3. *Antag att urvalsaxiomet gäller. Då är A och B är lika mäktiga, om och endast om $|A| = |B|$, och B är mäktigare än A om och endast om $|A| < |B|$.*

BEVIS. Om $|A| \leq |B|$ och $|B| \leq |A|$, så följer det ur Schröder–Bernsteins sats att A och B är lika mäktiga. Omvändningen följer trivialt.

B är mäktigare än A är ekvivalent med $|A| \in |B|$, det vill säga, B är mäktigare än A om och endast om $|A| < |B|$. □

KOROLLARIUM 4. *Antag att urvalsaxiomet gäller. Låt A vara en mängd av kardinaltal. Då utgör $<$ en välordning på A.*

BEVIS. Det är klart att $<$ är en lineär ordning på A. Sats 4 ger att $<$ är en välordning. □

KOROLLARIUM 5. *Antag att urvalsaxiomet gäller och att A och B är två mängder. Då gäller precis ett av följande påståenden: A och B är lika mäktiga; A är mäktigare än B; B är mäktigare än A.*

3. Kardinaltalsaritmetik

I detta avsnitt antar vi att urvalsaxiomet existerar. Vi kan då ge följande definitioner.

DEFINITION 13 (Addition av kardinaltal). Låt $\mathfrak{m}$ och $\mathfrak{n}$ vara två kardinaltal. Då definieras $\mathfrak{m} + \mathfrak{n}$ som det kardinaltal som ges av

$$\mathfrak{m} + \mathfrak{n} = |\mathfrak{m} \times \{0\} \cup \mathfrak{n} \times \{1\}|.$$

DEFINITION 14 (Multiplikation av kardinaltal). Låt $\mathfrak{m}$ och $\mathfrak{n}$ vara två kardinaltal. Då definieras $\mathfrak{m} \cdot \mathfrak{n}$ som det kardinaltal som ges av

$$\mathfrak{m} \cdot \mathfrak{n} = |\mathfrak{m} \times \mathfrak{n}|.$$

DEFINITION 15 (Exponentiering av kardinaltal). Låt $\mathfrak{m}$ och $\mathfrak{n}$ vara två kardinaltal. Då definieras $\mathfrak{m}^{\mathfrak{n}}$ som det kardinaltal som ges av

$$\mathfrak{m}^{\mathfrak{n}} = |\mathfrak{m}^{\mathfrak{n}}| = |\{ f : f\colon \mathfrak{m} \to \mathfrak{n} \}|.$$

Observera att $\mathfrak{m}^{\mathfrak{n}}$ dels betecknar mängden $\{f : f\colon \mathfrak{n} \to \mathfrak{m}\}$ och dels kardinaltalet till denna mängd.

Låt A vara en mängd. Det finns en bijektion $f\colon \mathscr{P}(A) \to 2^A$ som definieras av $f(B) = g_B$ där g_B ges av

$$b \in B \quad \Leftrightarrow \quad g_B(b) = 1.$$

Det följer att $\mathscr{P}(A)$ och 2^A är lika mäktiga, och eftersom A och $|A|$ är lika mäktiga, så är $|\mathscr{P}(A)| = |2^A| = 2^{|A|}$.

SATS 14. *Låt $\mathfrak{n}$ vara kardinaltalet till en oändlig mängd. Då är $\mathfrak{n} = \mathfrak{n}+\mathfrak{n}$.*

BEVIS. Vi säger att ett ordinaltal α är jämnt om $\alpha = \beta + 2n$ där β är en gränsordinal och $n \in \omega$. Om α inte är jämn, kallas det för udda.

Sätt

$$U = \{ \alpha \in \mathfrak{n} : \alpha \text{ är udda.} \},$$
$$J = \{ \alpha \in \mathfrak{n} : \alpha \text{ är jämn.} \}.$$

Då är U och J disjunkta och $\mathfrak{n} = U \cup J$.

Vi definierar nu två bijektioner $f\colon J \to \mathfrak{n}$ och $g\colon U \to \mathfrak{n}$ genom

$$f(\alpha + 2n) = \alpha + n,$$
$$g(\alpha + 2n + 1) = \alpha + n.$$

Detta visar att $|U| = |J| = \mathfrak{n}$. Eftersom U och J är disjunkta och $\mathfrak{n} = U \cup J$, medför detta att $\mathfrak{n} = |U| + |V| = \mathfrak{n} + \mathfrak{n}$. □

Med hjälp av sats 14 kan vi nu visa följande sats.

SATS 15. *Låt $\mathfrak{n}$ vara kardinaltalet till en oändlig mängd. Då är $\mathfrak{n} = \mathfrak{n}\cdot\mathfrak{n}$.*

BEVIS. Det är klart att kardinaltalet $\mathfrak{n} \cdot \mathfrak{n}$ inte kan vara mindre än $\mathfrak{n}$. För att få en motsägelse betraktar vi mängden av oändliga kardinaltal $\mathfrak{n}$ sådana att $\mathfrak{n} \cdot \mathfrak{n}$ är större än $\mathfrak{n}$, och antar att den inte är tom. Eftersom denna mängd är en mängd av ordinaler, innehåller den ett minsta element som vi betecknar med $\mathfrak{m}$.

Nu gäller följande. Om $\mathfrak{p} < \mathfrak{m}$ och $\mathfrak{p}$ är oändlig, så är $\mathfrak{p} = \mathfrak{p} \cdot \mathfrak{p}$, eftersom $\mathfrak{m}$ är minimal.

Betrakta mängden $A = \mathfrak{m} \times \mathfrak{m}$. Vi har att $|A| = \mathfrak{m} \cdot \mathfrak{m} > \mathfrak{m}$. Mängden A kan skrivas som en disjunkt union

$$A = \bigcup_{\delta \in \mathfrak{m}} A_\delta,$$

där $A_\delta = \{ (\alpha, \beta) \in A : \alpha + \beta = \delta \}$, ty om $\alpha, \beta \in \mathfrak{m}$ är oändliga och $\mathfrak{p}$ är den största av kardinaltalen $|\alpha|$ och $|\beta|$, så är $|\alpha + \beta| \leq \mathfrak{p} + \mathfrak{p} = \mathfrak{p} < \mathfrak{m}$ enligt sats 14, vilket visar att $\delta = \alpha + \beta \in \mathfrak{m}$ och att $(\alpha, \beta) \in A_\delta$.

Vi definierar nu en välordning på A. Om (α_1, β_1) och (α_2, β_2) är två element i A så säger vi att $(\alpha_1, \beta_1) < (\alpha_2, \beta_2)$ om $(\alpha_1, \beta_1) \in A_{\delta_1}$ och $(\alpha_1, \beta_1) \in A_{\delta_2}$, med $\delta_1 < \delta_2$. Sålunda är $(\alpha_1, \beta_1) < (\alpha_2, \beta_2)$ om $\alpha_1 + \beta_1 < \alpha_2 + \beta_2$.

Om $\alpha_1 + \beta_1 = \alpha_2 + \beta_2$, så säger vi att $(\alpha_1, \beta_1) < (\alpha_2, \beta_2)$ om $\alpha_1 < \alpha_2$ eller om $\alpha_1 = \alpha_2$ och $\beta_1 < \beta_2$. Detta definierar en välordning på A.

Vi låter $\gamma = \mathrm{Ord}(A)$. Eftersom $|A| = \mathfrak{m} \cdot \mathfrak{m} > \mathfrak{m}$ måste då $\mathfrak{m} \in \gamma$. Det måste därför finnas ett element $(\alpha_1, \beta_1) \in A$ sådant att mängden

$$B = \{ (\alpha, \beta) \in A : (\alpha, \beta) < (\alpha_1, \beta_1) \}$$

uppfyller $\mathrm{Ord}(B) = \mathfrak{m}$.

Låt $\delta_1 = \alpha_1 + \beta_1 + 1$. Eftersom $\mathfrak{m}$ är en gränsordinal kan inte $\mathfrak{m}$ och δ_1 vara lika, och vi måste ha $\delta_1 \in \mathfrak{m}$. Då är $\alpha + \beta < \delta_1 < \mathfrak{m}$ om $(\alpha, \beta) \in B$. Det följer att $B \subset \delta_1 \times \delta_1$ och $|B| \leq |\delta_1| \cdot |\delta_1|$.

Enligt vårt antagande är $|\delta_1| \cdot |\delta_1| = |\delta_1|$ eftersom $|\delta_1| < \mathfrak{m}$. Då är $|B| < \mathfrak{m}$, vilket motsäger att $\mathrm{Ord}(B) = \mathfrak{m}$. $\square$

4. Att jämföra kardinaltal

Sats 16. *Låt A vara en mängd. Då är $\mathscr{P}(A)$ och 2^A mäktigare än A.*

Bevis. Vi har i föregående avsnitt sett att $\mathscr{P}(A)$ och 2^A är lika mäktiga.

Det är klart att A inte är mäktigare än $\mathscr{P}(A)$, ty $f(a) = \{a\}$ definierar en en-entydig funktion $f\colon A \to \mathscr{P}(A)$. Vi ser att det nu räcker att visa att A inte är lika mäktig som $\mathscr{P}(A)$.

Antag att A är lika mäktig som $\mathscr{P}(A)$. Då finns en bijektion $f\colon A \to \mathscr{P}(A)$.

Låt

$$B = \{ a \in A : a \notin f(a) \}.$$

Då är $B \in \mathscr{P}(A)$ och eftersom f är en bijektion finns det därför ett $b \in A$ sådant att $B = f(b)$.

Nu gäller att

$$b \in B \quad \Leftrightarrow \quad b \notin f(b) \quad \Leftrightarrow \quad b \notin B,$$

ty $f(b) = B$. Detta är omöjligt, så alltså kan inte A vara lika mäktig som $\mathscr{P}(A)$. Det följer att $\mathscr{P}(A)$ är mäktigare än A. $\square$

Sats 17 (Hartogs). *Låt A vara en mängd. Det finns ett ordinaltal α sådant att $\alpha \preceq \mathscr{P}(\mathscr{P}(A \times A))$ och $\neg(\alpha \preceq A)$.*

Bevis. Låt $B \subset A$. Varje välordning $\leq$ på B kan på ett naturligt sätt identifieras med en delmängd r till $A \times A$, genom

$$a \leq b \quad \Leftrightarrow \quad (a, b) \in r.$$

På samma sätt ger vissa delmängder till $A \times A$ upphov till en välordning på en delmängd B till A. Vi betraktar dessa delmängder och låter

$$T = \{ r \in \mathscr{P}(A \times A) : r \text{ är en välordning på en delmängd till } A \}.$$

Vi definierar nu en funktion f på T enligt

$$f(r) = \text{ordningstypen av den mängd som } r \text{ välordnar}.$$

Nu är $\alpha = \{ f(r) : r \in T \}$ en mängd av ordinaler, och är i själva verket en ordinal, ty om $\beta \in \alpha$ och $\gamma \in \beta$ så är $\beta = f(r)$ för något r, välordningen r är en välordning av någon mängd $B \subset A$ och $\gamma = f(s)$ där s är restriktionen av r till en delmängd $C \subset B$, vilket visar att $\gamma \in \alpha$.

Vi definierar en en-entydig funktion $g\colon \alpha \to \mathscr{P}(\mathscr{P}(A \times A))$. Tag $\beta \in \alpha$. Då definierar vi

$$g(\beta) = \{\, r \in T : f(r) = \beta \,\}.$$

Då är g en-entydig varför $\alpha \preceq \mathscr{P}(\mathscr{P}(A \times A))$.

Vi visar nu att påståendet $\alpha \preceq A$ är falskt. Antag att $\alpha \preceq A$ gäller, så att det finns en en-entydig funktion $h\colon \alpha \to A$. Betrakta

$$s = \{\, (h(\beta), h(\gamma)) : \beta, \gamma \in \alpha,\ \gamma \notin \beta \,\} \subset \mathscr{P}(A \times A).$$

Då är s ett element i T och $f(s) = \alpha$. Sålunda är $\alpha \in \alpha$ vilket är omöjligt. □

Det är nu naturligt att införa följande axiom.

Axiom 14. Om A och B är två mängder, så gäller någon av relationerna $A \prec B$, $A \sim B$, eller $B \prec A$.

Vi ger följande korollarium till sats 17.

Korollarium 6. *Antag att axiom 14 gäller. Då gäller välordningsprincipen, axiom 11.*

Bevis. Låt A vara en mängd. Enligt sats 17 finns ett ordinaltal sådant att $\alpha \preceq A$ inte gäller. Enligt axiom 14 måste därför $A \prec \alpha$ gälla. Då finns det en en-entydig funktion $f\colon A \to \alpha$, och eftersom α är välordnad, så definierar detta en välordning på A. □

Korollarium 7. *Axiomen 10–14 är ekvivalenta.*

Bevis. Innebörden av Korollarium 6 och sats 13, tillsammans med satserna 11 och 4, visar ekvivalensen. □

5. Kardinaltalen $\aleph_\alpha$

Vi inför beteckningen $\aleph_0 = |\mathbb{N}|$. Detta kan vi göra utan urvalsaxiomet, ty det gäller tydligen att $\aleph_0 = \omega$.

Vi ska nu definiera kardinaltalen $\aleph_\alpha$, för alla ordinaltal α. Antag att $\aleph_\beta$ har definierats för alla $\beta \in \alpha$. Enligt sats 16 är $\mathscr{P}(\aleph_\beta)$ mäktigare än $\aleph_\beta$. Det följer att $\mathscr{P}\left(\bigcup_{\beta\in\alpha} \aleph_\beta\right)$ är mäktigare än $\aleph_\beta$ for $\beta \in \alpha$.

Om vi nu antar att urvalsaxiomet gäller, så kan vi låta

$$\gamma = \Big|\mathscr{P}\Big(\bigcup_{\beta\in\alpha} \aleph_\beta\Big)\Big|,$$

och betrakta följande mängd av ordinaltal

$$A = \bigcap_{\beta\in\alpha} \{\, \delta \in \gamma + 1 : |\delta| > \aleph_\beta \,\}.$$

Då är A inte tom, ty $\gamma \in A$. Låt ε vara det minsta elementet i A, och sätt $\aleph_\alpha = |\varepsilon| = \varepsilon$.

Vi har härmed definierat, med hjälp av urvalsaxiomet, en följd av kardinaltal med följande egenskaper. $\aleph_\alpha < \aleph_\beta$ om och endast om $\alpha \in \beta$. Om A är en mängd, så är antingen A ändlig, eller så finns det ett ordinaltal α sådant att $|A| = \aleph_\alpha$.

Om vi inte antar att urvalsaxiomet gäller, så kan vi istället använda sats 17. Antag att $\aleph_\beta$ har definierats för alla $\beta \in \alpha$. Enligt sats 17 finns det för varje $\beta \in \alpha$ ett ordinaltal α_β sådant att $\neg(\alpha_\beta \preceq \aleph_\beta)$. Eftersom α_β och $\aleph_\beta$ båda är ordinaltal gäller därför att $\aleph_\beta \prec \alpha_\beta$. Låt nu

$$\gamma = \bigcup_{\beta \in \alpha} \alpha_\beta.$$

Då är γ ett ordinaltal och mängden

$$A = \bigcap \{ \delta \in \gamma + 1 : |\delta| > \aleph_\beta \}$$

är inte tom. På samma sätt som tidigare låter vi ε vara det minsta elementet i A och sätter $\aleph_\alpha = |\varepsilon| = \varepsilon$.

På detta sätt har vi nu visat, utan att använda urvalsaxiomet, att det finns en följd av kardinaltal som uppfyller $\aleph_\alpha < \aleph_\beta$ om och endast om $\alpha \in \beta$. Vidare gäller att om A är en mängd sådan att $|A|$ existerar, så är antingen A ändlig, eller så finns det ett ordinaltal α sådant att $|A| = \aleph_\alpha$.

För ett ordinaltal α inför vi också beteckningen $\omega_\alpha = \aleph_\alpha$; beteckningen ω_α används när vi betraktar ω_α som ett ordinaltal, och $\aleph_\alpha$ används när vi betraktar $\aleph_\alpha$ som ett kardinaltal. Sålunda har vi att $\omega_0 = \omega$, och $\omega_\alpha + \omega_\beta$ torde tolkas som addition av ordinaltal, varjämte $\aleph_\alpha + \aleph_\beta$ torde tolkas som addition av kardinaltal.

6. Kontinuumhypotesen

Låt $\mathbb{R}$ beteckna de reella talen. De rationella talen $\mathbb{Q}$ är lika mäktiga som de naturliga talen $\mathbb{N}$, och varje reellt tal kan representeras av en räcka av tal i $\{0, 1\}$, på ett sätt som är entydigt så när som för de rationella talen. Härmed visar man lätt att $|\mathbb{R}| = 2^{\aleph_0}$. Vi inför beteckningen $\mathfrak{c}$ för kardinaltalet $|\mathbb{R}|$, vilket kallas för kontinuumet.

Kontinuumhypotesen är namnet på hypotesen att $\mathfrak{c} = \aleph_1$. Under antagandet att axiomen 1–10 gäller och är utan motsägelser, har Kurt Gödel, år 1940, visat att kontinuumhypotesen inte kan motbevisas utifrån nämnda axiom. Under samma antagande har Paul Cohen, år 1963, visat att kontinuumhypotesen inte kan bevisas utifrån nämnda axiom.

Sats 16 medför att $\aleph_\alpha < 2^{\aleph_\alpha}$ gäller för varje ordinaltal α. Sålunda är $\aleph_{\alpha+1} \leq 2^{\aleph_\alpha}$. Den *generaliserade kontinuumhypotesen* är att

$$\aleph_{\alpha+1} = 2^{\aleph_\alpha}.$$

Man definierar $\beth_0 = \aleph_0$ och $\beth_{\alpha+1} = 2^{\beth_\alpha}$. Om α är ett gränsordinaltal definieras $\beth_\alpha$ som det minsta kardinaltal γ som uppfyller

$$\beth_\beta \in S(\gamma) \qquad \text{för alla } \beta \in \alpha.$$

Den generaliserade kontinuumshypotesen kan med dessa beteckningar formuleras som att $\beth_\alpha = \aleph_\alpha$ för varje ordinaltal α.

7. Problem

(1) Visa att ett ordinaltal α är ett kardinaltal, om och endast om α ej är lika mäktigt som något $\beta \in \alpha$.

(2) Urvalsaxiomet antas gälla. Visa att om A_n är en mängd med $|A_n| = \aleph_0$ för varje $n \in \omega$, så är
$$\left|\bigcup_{n\in\omega} A_n\right| = \aleph_0.$$
Vad kan man säga om urvalsaxiomet inte antas gälla?

(3) Urvalsaxiomet antas inte gälla. Visa att om $A_n = \mathbb{N} \times \{n\}$, så är $|A_n| = \aleph_0$ och
$$\left|\bigcup_{n\in\omega} A_n\right| = \aleph_0.$$
Vad utgör skillnaden mot föregående uppgift?

(4) Urvalsaxiomet antas inte gälla. Visa att om $\mathfrak{m}$ är ett ordinaltal sådant att $\mathfrak{m} \geq \aleph_0$ så finns det ett ordinaltal α sådant att $\mathfrak{m} = \aleph_\alpha$.

(5) Urvalsaxiomet antas gälla. Visa att om A är en mängd som inte är ändlig så finns det ett ordinaltal α sådant att $|A| = \aleph_\alpha$.

KAPITEL 5

Filter

Låt X vara en mängd. Vi kommer här att studera vissa delmängder till $\mathscr{P}(X)$. I sådana sammanhang talar man ofta om *komplementet* till en mängd $A \in \mathscr{P}(X)$, vilken betecknas $\complement A$ och definieras som $\complement A = X \setminus A$.

DEFINITION 16 (Filter). Om $\mathscr{F} \subset \mathscr{P}(X)$, så kallas $\mathscr{F}$ för ett *filter* om

(1) $\mathscr{F} \neq \emptyset$.
(2) Om $A, B \in \mathscr{F}$, så är $A \cap B \in \mathscr{F}$.
(3) Om $A \in \mathscr{F}$ och $A \subset B \subset X$, så är $B \in \mathscr{F}$.

Ett filter $\mathscr{F}$ kallas *äkta* om $\emptyset \notin \mathscr{F}$, det vill säga om $\mathscr{F} \neq \mathscr{P}(X)$.

DEFINITION 17 (Ultrafilter). Låt $\mathscr{F}$ vara ett filter. Då kallas $\mathscr{F}$ för ett *ultrafilter* om följande gäller.

(1) $\mathscr{F}$ är ett äkta filter.
(2) Om $A \subset X$, så är antingen $A \in \mathscr{F}$ eller $\complement A \in \mathscr{F}$.

Ett filter $\mathscr{F}$ kallas *maximalt* om det inte finns ett filter $\mathscr{G}$ sådant att $\mathscr{F} \subset \mathscr{G} \subset \mathscr{P}(X)$ och $\mathscr{F} \neq \mathscr{G} \neq \mathscr{P}(X)$ gäller.

Vi ska först visa följande sats om ultrafilter.

SATS 18. *$\mathscr{F}$ är ett ultrafilter $\Leftrightarrow$ $\mathscr{F}$ är ett maximalt äkta filter.*

Innan vi bevisar satsen inför vi mer terminologi. Om $\mathscr{C} \subset \mathscr{P}(X)$, så säger vi att $\mathscr{C}$ har *icke-tomma ändliga snitt*, om det för varje ändlig icke-tom delmängd $\{A_1, \dots, A_n\} \subset \mathscr{C}$ gäller att snittet $A_1 \cap \cdots \cap A_n$ inte är tomt.

Det följer alltså ur definitionen för äkta filter, att om $\mathscr{F}$ är ett äkta filter, så har $\mathscr{F}$ icke-tomma ändliga snitt. Vi kan nu enkelt visa följande lemma.

LEMMA 3. *$\mathscr{F} \cup \{A\}$ har icke-tomma ändliga snitt, om och endast om, $\complement A \notin \mathscr{F}$.*

BEVIS. Vi ser att följande gäller för ett äkta filter $\mathscr{F}$. Om $\mathscr{F} \cup \{A\}$ har icke-tomma ändliga snitt så måste $\complement A \notin \mathscr{F}$. Om $\mathscr{F} \cup \{A\}$ ej har icke-tomma ändliga snitt, så finns $B \in \mathscr{F}$ sådant att $A \cap B = \emptyset$. Då är $B \subset \complement A$ och $\complement A \in \mathscr{F}$. □

Vi använder nu detta för att visa sats 18.

BEVIS FÖR SATS 18. Antag att $\mathscr{F}$ är ett äkta filter. Vi visar att

$$\mathscr{F} \text{ är ej ett ultrafilter} \quad \Leftrightarrow \quad \mathscr{F} \text{ är ej maximalt.}$$

Om $\mathscr{F}$ inte är ett ultrafilter, så finns det ett $A \subset X$ sådant att varken A eller $\complement A$ tillhör $\mathscr{F}$. Då har $\mathscr{F} \cup \{A\}$ icke-tomma ändliga snitt, enligt lemma 3. Det följer att

$$\mathscr{G} = \{\, B : \exists C \in \mathscr{F} \cup \{A\},\ C \cap A \subset B \,\}$$

utgör ett äkta filter. Tydligen är $\mathscr{F} \subset \mathscr{G}$ och $\mathscr{F}$ är ej maximalt, ty $A \in \mathscr{G}$ och $A \notin \mathscr{F}$.

Om $\mathscr{F}$ ej är maximalt så finns det ett äkta filter $\mathscr{G}$ sådant att $\mathscr{F} \subset \mathscr{G}$ och ett $A \in \mathscr{G} \setminus \mathscr{F}$. Då kan inte $\complement A \in \mathscr{F}$, ty då vore $\mathscr{G}$ ej äkta. Detta visar att $\mathscr{F}$ ej är ett ultrafilter. □

SATS 19 (Ultrafilterlemmat). *Antag att urvalsaxiomet gäller. Antag att* $\mathscr{C} \subset \mathscr{P}(X)$ *och att* $\mathscr{C}$ *har icke-tomma ändliga snitt. Då finns ett ultrafilter som omsluter* $\mathscr{C}$.

BEVIS. Sätt

$$\mathscr{F} = \{\, A : A \supset B_1 \cap \cdots \cap B_n \text{ för något } n \text{ och } B_1, \ldots, B_n \in \mathscr{C} \,\}.$$

Då är $\mathscr{F}$ ett äkta filter. Låt Φ vara mängden av alla äkta filter som innehåller $\mathscr{C}$. Då är Φ ej tom, ty $\mathscr{F} \in \Phi$ och inklusion utgör en partiell ordning på Φ. Om Ψ är en lineärt ordnad delmängd av Φ, så finns en övre begränsning till Ψ, nämnligen $\cup\Psi$. Zorns lemma medför därför att det finns ett största element i Ψ. Detta element är uppenbarligen ett äkta filter och det utgör ett ultrafilter enligt sats 18. □

KAPITEL 6

Borelmängder

1. σ-algebror och Borelmängder

Vi betraktar i föreliggande kapitel olika delmängder till $\mathscr{P}(\mathbb{R}^d)$. Låt G beteckna de öppna mängderna och låt F beteckna de slutna mängderna i $\mathscr{P}(\mathbb{R}^d)$.

LEMMA 4. $|G| = |F| = \mathfrak{c}$.

BEVIS. Vi har att $|\mathbb{R}^d| = \mathfrak{c}$. Vidare är det klart att $\mathfrak{c} \leq |G| = |F|$, ty $\{x\} \in F$ för varje $x \in \mathbb{R}$ och $A \in G$ om och endast om $\complement A \in F$.

Låt för $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 1$,

$$\mathscr{C}_n = \Big\{ \bigtimes_{k=1}^{d} \Big[\frac{a_k}{n}, \frac{b_k}{n}\Big] : a_k, b_k \in \mathbb{Z} \Big\}.$$

Tag $U \in G$. Låt

$$\mathscr{D}_1 = \{ Q \in \mathscr{C}_1 : Q \subset U \}$$

och definiera rekusivt

$$\mathscr{D}_n = \Big\{ Q \in \mathscr{C}_n : Q \subset U \setminus \Big(\bigcup_{k=1}^{n-1} \cup \mathscr{D}_k \setminus \partial \bigcup_{k=1}^{n-1} \cup \mathscr{D}_k \Big) \Big\}.$$

Då är

$$U = \bigcup_n \cup \mathscr{D}_n,$$

och detta definierar en en-entydig avbildning från G till $\aleph_0^{\aleph_0} = \mathfrak{c}$. □

DEFINITION 18. $\mathscr{A} \subset \mathscr{P}(\mathbb{R}^d)$ kallas för en *algebra* om $\mathbb{R}^d \in \mathscr{A}$; $A \in \mathscr{A} \Rightarrow \complement A \in \mathscr{A}$; och $A, B \in \mathscr{A} \Rightarrow A \cup B \in \mathscr{A}$.

Om $\mathscr{A}$ är en algebra och om

$$(\mathscr{C} \subset \mathscr{A}, \quad |\mathscr{C}| \leq \aleph_0) \quad \Rightarrow \quad \cup \mathscr{C} \in \mathscr{A},$$

så kallas $\mathscr{A}$ för en *σ-algebra*.

LEMMA 5. *Om $\mathscr{C} \subset \mathscr{P}(\mathbb{R}^d)$ så finns det en minsta σ-algebra $\sigma(\mathscr{C})$ som omsluter $\mathscr{C}$.*

BEVIS. Vi ser att om $\mathscr{S}$ är en mängd av σ-algebror och $\mathscr{S} \neq \emptyset$, så är $\cap \mathscr{S}$ en σ-algebra.

Låt $\mathscr{S}$ vara mängden av alla σ-algebror som omsluter $\mathscr{C}$. Då är $\mathscr{P}(\mathbb{R}^d) \in \mathscr{S}$. Den minsta σ-algebran som omsluter $\mathscr{C}$ ges av $\cap \mathscr{S}$. □

DEFINITION 19. *Borel-σ-algebran* $\mathscr{B}$ definieras av $\mathscr{B} = \sigma(G)$. Om $A \in \mathscr{B}$ så kallas A för en *borelmängd*.

Om $\mathscr{C}$ är en mängd, så låter vi $\mathscr{C}_\sigma$ och $\mathscr{C}_\delta$ beteckna alla uppräkneliga unioner respektive snitt av mängder i $\mathscr{C}$. Sålunda har vi att

$$\mathscr{C}_\sigma = \{\cup\mathscr{D} : \mathscr{D} \subset \mathscr{C} \text{ och } |\mathscr{D}| \le \aleph_0\},$$
$$\mathscr{C}_\delta = \{\cap\mathscr{D} : \mathscr{D} \subset \mathscr{C} \text{ och } |\mathscr{D}| \le \aleph_0\}.$$

Vi erinrar oss att ω_1 betecknar den minsta icke-uppräkneliga ordinalen. Förmedelst transfinit induktion över $0 \in \alpha \in \omega_1$ definierar vi de så kallade *borelklasserna*, vilka utgörs av de *additiva klasserna* Σ^0_α, de *multiplikativa klasserna* Π^0_α samt de *tvetydiga klasserna* Δ^0_α. Sätt

$$\Sigma^0_1 = G, \qquad \Pi^0_1 = F.$$

För $0 \in \alpha \in \omega_1$ låter vi

$$\Sigma^0_\alpha = \Big(\bigcup_{\beta\in\alpha} \Pi^0_\beta\Big)_\sigma, \qquad \Pi^0_\alpha = \Big(\bigcup_{\beta\in\alpha} \Sigma^0_\beta\Big)_\delta, \qquad \Delta^0_\alpha = \Sigma^0_\alpha \cap \Pi^0_\alpha.$$

Sålunda har vi att $\Sigma^0_2 = F_\sigma$, $\Pi^0_2 = G_\delta$, $\Sigma^0_3 = G_{\delta\sigma}$ och så vidare. För att förenkla våra beteckningar låter vi $\Sigma^0_0 = \Pi^0_0 = \emptyset$.

Lemma 6. *Låt $0 \in \alpha \in \omega_1$. Den additiva klassen Σ^0_α är sluten under uppräkneliga unioner, $(\Sigma^0_\alpha)_\sigma = \Sigma^0_\alpha$. Den multiplikativa klassen Π^0_α är sluten under uppräkneliga snitt, $(\Pi^0_\alpha)_\delta = \Pi^0_\alpha$. Alla tre klasser Σ^0_α, Π^0_α och Δ^0_α är slutna under ändliga unioner och snitt. Slutligen är*

$$\Sigma^0_\alpha = \{\complement E : E \in \Pi^0_\alpha\}, \qquad \Pi^0_\alpha = \{\complement E : E \in \Sigma^0_\alpha\}.$$

Bevis. Egenskaperna avseende unioner och snitt följer ur definitionerna för klasserna. Det sista påståendet är uppenbart för $\alpha = 1$ och följer för allmänt α genom transfinit induktion. □

Sats 20. *Följande gäller.*

(1) *För $0 \in \alpha \in \omega_1$ är*

$$\Sigma^0_\alpha, \Pi^0_\alpha \subset \Delta^0_{\alpha+1}.$$

(2) *För $1 \in \alpha \in \omega_1$ är*

$$\Sigma^0_\alpha = (\Delta^0_\alpha)_\sigma \qquad \textit{och} \qquad \Pi^0_\alpha = (\Delta_\alpha)_\delta.$$

(3) $\mathscr{B} = \bigcup_{\alpha\in\omega_1} \Sigma^0_\alpha = \bigcup_{\alpha\in\omega_1} \Pi^0_\alpha.$

Bevis. Påstående (1) gäller för $\alpha = 1$ och följer för allmänt α genom transfinit induktion.

Vi visar nu påstående (2). Ur påstående (1) ser vi att inklusionen

$$\bigcup_{\beta\in\alpha} \Pi^0_\beta \subset \Delta^0_\alpha$$

håller för $1 \in \alpha \in \omega_1$. Därav följer att $\Sigma^0_\alpha \subset (\Delta^0_\alpha)_\sigma$, ty $(\Sigma^0_\alpha)_\sigma = \Sigma_\alpha$ enligt Lemma 6. Men vi har också att $\Delta^0_\alpha \subset \Sigma^0_\alpha$ varur $(\Delta^0_\alpha)_\sigma \subset \Sigma^0_\alpha$ följer. Sålunda är $\Sigma^0_\alpha = (\Delta^0_\alpha)_\sigma$ och på samma sätt följer att $\Pi^0_\alpha = (\Delta^0_\alpha)_\delta$.

För att visa påstående (3) låter vi

$$\mathscr{C} = \bigcup_{\alpha\in\omega_1} \Sigma^0_\alpha.$$

Då är $G \subset \mathscr{C}$. Enligt Lemma 6 gäller att $A \in \Sigma^0_\alpha$ medför att $\complement A \in \Pi^0_\alpha \subset \Sigma^0_{\alpha'}$, vilket visar att $\mathscr{C}$ är sluten under komplement.

För varje $n \in \omega$, låt $A_n \in \mathscr{C}$. Då är $A_n \in \Sigma^0_{\alpha_n}$ för något $\alpha_n \in \omega_1$. Låt $\alpha = \bigcup_{n\in\omega} \alpha_n$. Då är $\bigcup_{n\in\omega} A_n \in \Sigma^0_{\alpha+1}$. Vidare är alla α_n uppräkneliga, varför också $\alpha+1$ är uppräknelig. Alltså är $\alpha \in \omega_1$ och $\bigcup_{n\in\omega} A_n \in \mathscr{C}$. Detta visar att $\mathscr{C}$ är sluten under uppräkneliga unioner, $\mathscr{C} = \mathscr{C}_\sigma$.

Eftersom $\mathscr{C}$ är sluten under komplement och uppräkneliga snitt har vi att $\mathscr{C}$ är en σ-algebra. Det följer att inklusionerna $G \subset \mathscr{C} \subset \mathscr{B}$ gäller, vilket ger oss att $\mathscr{B} = \mathscr{C}$. □

Korollarium 8. $|\Pi^0_\alpha| = |\Sigma^0_\alpha| = |B| = \mathfrak{c}$.

Bevis. Enligt Lemma 4 är $|\Pi^0_1| = |\Sigma^0_1| = \mathfrak{c}$. Vi visar med transfinit induktion att $|\Pi^0_\alpha| = |\Sigma^0_\alpha| = \mathfrak{c}$ för alla $\alpha \in \omega_1$.

Antag att $|\Pi^0_\beta| = |\Sigma^0_\beta| = \mathfrak{c}$ gäller för alla $\beta \in \alpha$, där $\alpha \in \omega_1$. Eftersom $|\Sigma^0_\beta| = \mathfrak{c}$ för $\beta \in \alpha$ och $|\alpha| \le \aleph_1$ har vi att

$$\left|\bigcup_{\beta\in\alpha} \Sigma^0_\beta\right| \le \mathfrak{c}\cdot\aleph_1 \le \mathfrak{c}\cdot\mathfrak{c} = \mathfrak{c}.$$

Nu följer att

$$\mathfrak{c} \le |\Pi^0_\alpha| = \left|\Big(\bigcup_{\beta\in\alpha} \Sigma^0_\beta\Big)_\delta\right| \le \mathfrak{c}^{\aleph_0} = (2^{\aleph_0})^{\aleph_0} = 2^{\aleph_0\cdot\aleph_0} = 2^{\aleph_0} = \mathfrak{c}$$

och på samma sätt får vi att $|\Sigma^0_\alpha| = \mathfrak{c}$. Transfinit induktion ger oss detta resultat för alla $\alpha \in \omega_1$.

Slutligen har vi att $|\mathscr{B}| = \mathfrak{c}$ ty

$$\mathfrak{c} \le |\mathscr{B}| = \left|\bigcup_{\alpha\in\omega_1} \Sigma^0_\alpha\right| \le \mathfrak{c}\cdot|\omega_1| \le \mathfrak{c}\cdot\mathfrak{c} = \mathfrak{c}. \qquad \square$$

2. Mer om σ-algebror

Om $\{\mathscr{A}_i : i \in I\}$ är en mängd av σ-algebror så låter vi

$$\bigotimes_{i\in I} \mathscr{A}_i$$

beteckna den minsta σ-algebra som omsluter mängden av mängder på formen

$$\bigtimes_{i\in I} A_i, \qquad A_i \in \mathscr{A}_i.$$

Sats 21 (Rao). *Om kontinuumhypotesen gäller så är* $\mathscr{P}(\mathbb{R}^2) = \mathscr{P}(\mathbb{R}) \otimes \mathscr{P}(\mathbb{R})$.

Bevis. Kontinuumshypotesen ger att $\mathfrak{c} = |\omega_1|$ och $\mathbb{R}$ kan därför välordnas. Välordna $\mathbb{R}$ och låt $\le$ beteckna välordningen.

Låt $\mathscr{R}$ vara den uppräkneliga mängden av öppna intervall med rationella ändpunkter. Låt $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$. Då är

$$y \ne f(x) \qquad \Leftrightarrow \qquad \exists I \in \mathscr{R}(f(x) \in I \text{ och } y \notin I),$$

vilket visar att

$$f = \complement \bigcup_{I \in \mathscr{R}} (f^{-1}(I) \times \complement I).$$

Sålunda är $f \in \mathscr{P}(\mathbb{R}) \otimes \mathscr{P}(\mathbb{R})$.

Tag nu $A \subset \mathbb{R} \times \mathbb{R}$. Vi skriver $A = B \cup C$ där

$$B = A \cap \{ (a,b) : b \leq a \},$$
$$C = A \cap \{ (a,b) : a \leq b \}.$$

Tag $a \in \mathbb{R}$. Då är $B_a = \{ b : (a,b) \in B \}$ högst uppräknelig. Vi kan då framställa B_a på formen $B_a = \{ b_k(a) : k \in \mathbb{N} \}$. Enligt vad som visade ovan är $b_k \in \mathscr{P}(\mathbb{R}) \otimes \mathscr{P}(\mathbb{R})$.

Vi har alltså att $b_n = \{ (a, b_n(a)) : a \in \mathbb{R} \} \in \mathscr{P}(\mathbb{R}) \otimes \mathscr{P}(\mathbb{R})$ och det gäller därför att

$$B = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} b_n \in \mathscr{P}(\mathbb{R}) \otimes \mathscr{P}(\mathbb{R}).$$

På samma sätt visas att $C \in \mathscr{P}(\mathbb{R}) \otimes \mathscr{P}(\mathbb{R})$. Sålunda är $A \in B \cup C \in \mathscr{P}(\mathbb{R}) \otimes \mathscr{P}(\mathbb{R})$. $\square$

Litteraturförteckning

[1] K. J. Devlin, *The joy of sets: fundamentals of contemporary set theory*, Springer-Verlag, New York–Berlin, andra upplagan, 1993.

[2] R. Goldblatt, *Lectures on the hyperreals: an introduction to nonstandard analysis*, Graduate texts in mathematics 188, Springer-Verlag, New York, 1998.

[3] F. Hausdorff, *Grundzüge der Mengenlehre*, första upplagan, Chelsea publishing company, New York, 1965.

[4] J. Roitman, *Introduction to modern set theory*, Wiley, New York, 1990.

[5] W. Sierpiński, *Cardinal and ordinal numbers*, Polska akademia nauk, Monografie matematyczne, tom 34, andra upplagan, Warszawa, 1965.

[6] S. M. Srivastava, *A course on Borel sets*, Graduate texts in mathematics 180, Springer-Verlag, New York, 1998.

Sakregister