

Sammanfattning

Fysikaliska modeller

Kontinuitetsekvationen: $q'_t + \text{div } \mathbf{j} = k$ kommer från ökning + utflöde = nyproduktion. Här är q densitet (mängd/m³), \mathbf{j} strömtäthet (mängd/m²s) och k är källtäthet (mängd/m³s).

Diffusionsekvationen: $q'_t - D \Delta q = k$, där D kallas diffusionskonstanten, fås genom att kombinera kontinuitetsekvationen och Ficks lag $\mathbf{j} = -D \text{grad } q$.

Värmeledningsekvationen: $\rho c u'_t - \lambda \Delta u = k$ fås på samma sätt som diffusionsekvationen. Energidensiteten q och temperaturen u kopplas ihop genom $q'_t = \rho c u'_t$. Motsvarigheten till Ficks lag är Fouriers lag $\mathbf{j} = -\lambda \text{grad } u$ där λ är värmeledningsförmågan (värmediffusiviteten).

Vågekvationen: $u''_{tt} - c^2 \Delta u = f/\rho$, där f är kraftfördelning, ρ massdensitet och u utböjningen. För ljudvågor är u relativa tryckstörningen ($= (p - p_0)/p_0$).

Laplaces ekvation $\Delta u = 0$ och **Poissons ekvation** $-\Delta u = f$ kan tolkas som stationär diffusion, stationär värmeledning, stationär svängning eller elektrostatisk potential.

Randvillkor kan vara av typ **dirichlet** med givet u , **neumann** med givet $\partial_n u$ eller blandade.

Homogena randvillkor innebär $u = 0$ eller $\partial_n u = 0$ eller $\alpha u + \beta \partial_n u = 0$.

För värmeledning och diffusion gäller

$$\mathbf{j} \cdot \mathbf{n} = -\lambda \text{grad } u \cdot \mathbf{n} = -\lambda \partial_n u.$$

Ett neumannvillkor betyder alltså att flödets normalkomponent är given.

I en dimension har de homogena randvillkoren följande tolkningar.

Värmeledning/diffusion

$$\begin{aligned} u(a, t) = 0, & \quad \text{temperaturen/koncentrationen i } a \text{ är } 0, \\ u'_x(a, t) = 0, & \quad \text{inget utflöde i } a, \text{ isolerad (sluten) ände,} \\ \alpha u(a, t) + \beta u'_x(a, t) = 0, & \quad \text{Newtons avsvalningslag gäller i } a \text{ (omgivningens temp = 0).} \end{aligned}$$

Transversella och longitudinella svängningar

$$\begin{aligned} u(a, t) = 0, & \quad \text{utböjningen i } a \text{ är } 0, \quad \text{fast ände,} \\ u'_x(a, t) = 0, & \quad \text{kraften i } a \text{ är } 0, \quad \text{lös ände,} \\ \alpha u(a, t) + \beta u'_x(a, t) = 0, & \quad \text{fjäderkraft verkar i änden.} \end{aligned}$$

Ljudvågor

$$\begin{aligned} u(a, t) = 0, & \quad \text{tryckstörningen i } a \text{ är } 0, \quad \text{öppen ände,} \\ u'_x(a, t) = 0, & \quad \text{partikelhastigheten i } a \text{ är } 0, \quad \text{sluten ände.} \end{aligned}$$

Fouriers metod, egenfunktionsutvecklingar

Värmeledning i en begränsad stav med variabelseparation

Problem: $u'_t - a u''_{xx} = 0$ i $0 < x < L$, $t > 0$ med homogena randvillkor och givna begynnelsevillkor.

Sök först icke-triviala lösningar av typ $u(x, t) = T(t)X(x)$ till $\begin{cases} u'_t - a u''_{xx} = 0, \\ \text{hom. randvillkor.} \end{cases}$

$$\begin{cases} T'X - aTX'' = 0, \\ \text{hom. randvillkor,} \end{cases} \iff \begin{cases} \frac{1}{a} \frac{T'}{T} = \frac{X''}{X} = -\lambda, \\ \text{hom. randvillkor,} \end{cases} \iff \begin{cases} T' + a\lambda T = 0, \\ -X'' = \lambda X, \\ \text{hom. randvillkor.} \end{cases}$$

Differentialekvationerna för X resp T kan nu lösas var för sig. Ekvationen för X tillsammans med randvillkoren ger diskreta värden på λ , **egenvärdena** λ_k och tillhörande **egenfunktioner** $X_k(x) = \varphi_k(x)$. Tillsammans får man $u_k(x, t) = c_k e^{-a\lambda_k t} \varphi_k(x)$.

För homogena *dirichletvillkor* är $\lambda_k = k^2 \pi^2 / L^2$ och $\varphi_k(x) = \sin(k \pi x / L)$, $k = 1, 2, \dots$

För homogena *neumannvillkor* är $\lambda_k = k^2 \pi^2 / L^2$ och $\varphi_k(x) = \cos(k \pi x / L)$, $k = 0, 1, \dots$

Med **superposition** finner vi fler lösningar $u(x, t) = \sum_k c_k e^{-a\lambda_k t} \varphi_k(x)$. Konstanterna c_k bestäms av begynnelsevillkoren. (Oftast med lämplig fourierserietveckling.)

Värmeledning i en begränsad stav med ansatsmetod

Detta är en förkortad variant av föregående och används om man vet vilka egenfunktionerna φ_k är.

Problem: $u'_t - a u''_{xx} = 0$ i $0 < x < L$, $t > 0$ med *homogena* dirichlet- eller neumannvillkor och givna begynnelsevillkor. Ansätt då direkt

$$u = \sum_{k=1}^{\infty} u_k(t) \sin(k\pi x/L) \quad (\text{dirichlet}) \quad \text{eller} \quad u = \sum_{k=0}^{\infty} u_k(t) \cos(k\pi x/L) \quad (\text{neumann}).$$

Derivera termvis och sätt in i differentialekvationen. Detta leder till differentialekvationerna $u'_k(t) + a\lambda_k u_k(t) = 0$ med lösningarna $u_k(t) = c_k e^{-a\lambda_k t}$. Koefficienterna c_k bestäms av begynnelsevillkoret.

Kommentar: En fördel med denna metod är att den också fungerar för inhomogena differentialekvationer ($u'_t - a u''_{xx} = f(x, t)$). Skillnaden är att man får en inhomogen differentialekvation för $u_k(t)$, se nedan. Samma ansatser fungerar också för den endimensionella vågekvation (odämpad $u''_{tt} - c^2 u''_{xx} = f(x, t)$ eller dämpad $u''_{tt} - a u'_t - c^2 u''_{xx} = f(x, t)$) med homogena dirichlet- eller neumannvillkor, och för Laplace/Poissons ekvation ($-\Delta u = f$) på en rektangel med homogena dirichlet- eller neumannvillkor i x -led.

Diffusion och värmeledning med homogena randvillkor i operatorform

Detta är en vidareutveckling av föregående och kan användas på allmännare differentialekvationer med allmännare homogena randvillkor.

Med $\mathcal{A} = -\Delta$ (eller en allmännare differentialoperator av Sturm-Liouvilletyp) och

$$D_{\mathcal{A}} = \{ u \in C^2(\Omega); \alpha u + \beta \partial_n u = 0 \}$$

kan värmeledningsproblemet formuleras

$$\begin{cases} u'_t + a \mathcal{A} u = f, \\ u(x, 0) = g. \end{cases}$$

Bestäm först **egenfunktioner** och **egenvärden** till \mathcal{A} genom att lösa

$$\begin{cases} \mathcal{A} u = \lambda u, & u \neq 0, \\ u \in D_{\mathcal{A}}. \end{cases}$$

(Om problemet är välbekant och man redan vet vilka egenfunktionerna är behöver man naturligtvis inte räkna ut dem.) Ansätt en lösning

$$u(x, t) = \sum_k u_k(t) \varphi_k(x).$$

Utveckla f och g i egenfunktioner till \mathcal{A} . Här utnyttjas att dessa är en ortogonal bas i L_2 .

$$f(x, t) = \sum_k f_k \varphi_k(x), \quad g(x) = \sum_k g_k \varphi_k(x).$$

Koefficienterna f_k och g_k beräknas med projektionsformeln t ex $f_k = (\varphi_k | f) / (\varphi_k | \varphi_k)$. (I fallet med sinus- eller cosinusserier är detta de vanliga formlerna för beräkning av fourierkoefficienter.) Derivera u termvis (använd $\mathcal{A} \varphi_k = \lambda_k \varphi_k$), sätt in i värmeledningsekvationen och begynnelsevillkoret. Detta leder till följande differentialekvation för $u_k(t)$

$$u'_k(t) + a\lambda_k u_k(t) = f_k(t), \quad u_k(0) = g_k.$$

Lösningen kan skrivas som summan av en partikulärlösning $u_{k,\text{part}}$ och allmänna homogena lösningen $c_k e^{-a\lambda_k t}$. Konstanterna c_k bestäms av begynnelsevärdet ($u_k(0) = g_k$).

Alternativ: om f inte beror på t . Låt u_{stat} vara en stationär (= tidsberoende) lösning till diffekvationen och randvillkoren. $v = u - u_{\text{stat}}$ uppfyller då ekvationen

$$\begin{cases} v'_t + a \mathcal{A} v = 0, \\ v(x, 0) = g - u_{\text{stat}}. \end{cases}$$

Denna löses med ansatsen $v(x, t) = \sum_k v_k(t) \varphi_k(x)$, och ger en homogen differentialekvation för v_k . Totala lösningen är av formen $u = u_{\text{stat}} + \sum_k c_k e^{-a\lambda_k t} \varphi_k(x)$. Här ses att om alla $\lambda_k > 0$ så $u \rightarrow u_{\text{stat}}, t \rightarrow \infty$ (ungefär som $e^{-a\lambda_1 t}$, där λ_1 är det minsta egenvärdet). I detta alternativet kan man alltså direkt utläsa den asymptotiska (= stationära) lösningen u_{stat} . I lösningen till det förra alternativet kan man se den stationära lösningen i form av en serie.

Vågekvationen med homogena randvillkor, begränsat område

Med $\mathcal{A} = -\Delta$, $D_{\mathcal{A}} = \{u \in C^2(\Omega); \text{ homogena randvillkor} \}$ kan problemet formuleras

$$\begin{cases} u''_{tt} + c^2 \mathcal{A} u = 0, \\ u(x, 0) = g(x), \quad u'_t(x, 0) = b(x). \end{cases}$$

Problemet löses analogt med värmeledningsekvationen. Starta med att bestämma egenfunktioner till \mathcal{A} . Utveckla i dessa

$$u(x, t) = \sum_k u_k(t) \varphi_k(x), \quad g(x) = \sum_k g_k \varphi_k(x), \quad b(x) = \sum_k b_k \varphi_k(x).$$

Insättning i vågekvationen leder till

$$u''_k(t) + c^2 \lambda_k u_k(t) = 0, \quad u_k(0) = g_k, \quad u'_k(0) = b_k$$

med lösningar av typ

$$u_k(t) = a_k \cos(c\sqrt{\lambda_k}t) + b_k \sin(c\sqrt{\lambda_k}t) \text{ om } \lambda_k > 0 \quad \text{och} \quad u_k(t) = a + bt \text{ om } \lambda_k = 0.$$

a_k och b_k bestäms av begynnelsevärdena. Lösningen blir en överlagring av stående vågor med egenvinkelfrekvenserna $\omega_k = c\sqrt{\lambda_k}$. Svängningen är odämpad och "behåller sin form".

Inhomogena randvillkor

Starta med att homogenisera randvillkoren genom att sätta $v = u - \tilde{u}$ där \tilde{u} uppfyller randvillkoren. Välj \tilde{u} så enkel som möjligt. Ofta går det bra med en konstant eller ett första- eller andragradspolynom.

Dirichlets problem

$-\Delta u = f$ i Ω , $u = 0$ på $\partial\Omega$ kan för vissa Ω lösas analogt med variabelseparation och egenfunktionsutveckling. För en rektangel separerar man i variablerna x och y . (Lösningmetoden är mycket lik motsvarande för den endimensionella vågekvationen på ett begränsat intervall.) För icke-homogena dirichletvillkor kan det vara bra att dela upp i delproblem och använda superposition (se exempel 3.9 i boken).

För $\Omega =$ enhetscirkeln används polära koordinater variabelseparation (exempel 3.17 i boken). För detta problem, med $g(\theta) = \delta(\theta)$, går serien att summera och man kommer fram till Poissons formel för enhetscirkeln (kap 5.2.2).

Hilbertrum, operatorer, egenfunktioner

Ett **linjärt rum** H är en mängd med addition och multiplikation med skalärer, som följer de vanliga räknelagarna, t ex \mathbb{R}^n och $C^2(\Omega)$.

$(u | v)$ är **skalärprodukt** i H om

$$\begin{aligned}(u | \lambda_1 v_1 + \lambda_2 v_2) &= \lambda_1 (u | v_1) + \lambda_2 (u | v_2), \\ (u | v) &= \overline{(v | u)}, \\ (u | u) &\geq 0 \quad \text{med likhet} \iff u = 0.\end{aligned}$$

Speciellt gäller att $(u | \lambda v) = \lambda (u | v)$ och $(\lambda u | v) = \overline{\lambda} (u | v)$.

Normen av u är $\|u\| = \sqrt{(u | u)}$.

Linjära rum med skalärprodukt kallas **prehilbertrum**. Ett fullständigt prehilbertrum kallas **hilbertrum**.

Ett viktigt exempel på hilbertrum är $L_2(w, \Omega)$ med skalärprodukten och normen

$$(u | v) = \int_{\Omega} \overline{u(x)} v(x) w(x) dx \quad \text{resp} \quad \|u\| = \left(\int_{\Omega} |u(x)|^2 w(x) dx \right)^{1/2}.$$

Funktionen $w(x) > 0$ kallas **viktfunction**.

I prehilbertrum gäller

Pythagoras sats: $u \perp v \implies \|u + v\|^2 = \|u\|^2 + \|v\|^2$.

Cauchy-Schwarz olikhet: $|(u | v)| \leq \|u\| \|v\|$ med likhet precis då u och v är proportionella.

Triangelolikheten: $\|u + v\| \leq \|u\| + \|v\|$.

Ortogonalitet: Funktionerna $\{\varphi_k\}_1^\infty$ är **parvis ortogonala** i prehilbertrummet \mathcal{H} om

$(\varphi_k | \varphi_l) = 0$ då $k \neq l$. Om dessutom $\|\varphi_k\|^2 = (\varphi_k | \varphi_k) = 1$ är systemet **ortonormerat**.

Projektioner Låt $\varphi_1, \dots, \varphi_n$ vara parvis ortogonala och låt $\mathcal{M} = [\varphi_1, \dots, \varphi_n]$ vara det linjära höljet av $\varphi_1, \dots, \varphi_n$. Projektionen på \mathcal{M} av ett godtyckligt $u \in \mathcal{H}$ definieras av

$$P_{\mathcal{M}}(u) = \sum_1^n \frac{1}{\rho_k} (\varphi_k | u) \varphi_k \quad \text{där} \quad \rho_k = \|\varphi_k\|^2 = (\varphi_k | \varphi_k).$$

Minstakvadratmetoden är en följd av **projektionssatsen** som säger att

$$\inf_{v \in \mathcal{M}} \|u - v\|^2 = \|u - P_{\mathcal{M}}(u)\|^2,$$

dvs att $P_{\mathcal{M}}(u)$ är det element i \mathcal{M} som bäst approximerar u om avvikelsen mäts i norm. Med hjälp av Pythagoras sats ses att avvikelsen

$$\|u - P_{\mathcal{M}}(u)\|^2 = \|u\|^2 - \|P_{\mathcal{M}}(u)\|^2 = \|u\|^2 - \sum_{k=1}^n \frac{|(\varphi_k | u)|^2}{\rho_k}.$$

Gram-Schmidts ortogonaliseringsprocess: Ur en linjärt oberoende följd skapas ett ortogonalt system som har samma linjära hölje som den ursprungliga följden.

Om $1, x, x^2, \dots$ ortogonaliseras med skalärprodukten i $L_2(w, \Omega)$ fås **ortogonalpolynom**. Med viktfunctionen $w(x) = 1$ och intervallet $\Omega = [-1, 1]$ fås **Legendrepolynomen** P_n .

Konvergens i norm: $u_k \rightarrow u$ i $\mathcal{H} \iff \|u_k - u\| \rightarrow 0$ (då $k \rightarrow \infty$).

Generaliserade fouriersserier Låt u vara ett element i ett pre-Hilbertrum \mathcal{H} och $\{\varphi_k\}_1^\infty$ parvis ortogonala i \mathcal{H} , då är $c_k = (\varphi_k | u) / \rho_k$ de generaliserade fourierkoefficienterna för u och $\sum_1^\infty c_k \varphi_k$ är den generaliserade fourierserien för u . Det är inte säkert att serien konvergerar mot u .

Om varje $u \in \mathcal{H}$ kan skrivas $u = \sum_1^\infty c_k u_k$ (konvergens i norm), så säger man att $\{\varphi_k\}_1^\infty$ är en **ortogonal bas** för \mathcal{H} .

Exempel:

$\{e^{ik\pi x}\}_{k=-\infty}^\infty$,	är en ortogonal bas i $L_2([-1, 1])$,
$\{\sin(k\pi x)\}_{k=1}^\infty$,	är en ortogonal bas i $L_2([0, 1])$,
$\{\cos(k\pi x)\}_{k=0}^\infty$,	är en ortogonal bas i $L_2([0, 1])$,
Legendrepolyomen $\{P_k(x)\}_{k=0}^\infty$,	är en ortogonal bas i $L_2([-1, 1])$,
$\{\sin(k\pi x) \sin(j\pi y)\}_{j,k=1}^\infty$,	är en ortogonal bas i $L_2([0, 1] \times [0, 1])$,
$\left\{ \begin{array}{l} J_n(\alpha_{n,k}r) \cos(n\theta), J_n(\alpha_{n,k}) \sin(n\theta), \\ J_0(\alpha_{0,k}r), n, k = 1, 2, \dots, \end{array} \right.$	är en ortogonal bas i $L_2(r, \Omega)$, $\Omega : 0 \leq r \leq 1, 0 \leq \theta < 2\pi$.

Parsvals formel: Om $\{\varphi_k\}_1^\infty$ är en ortogonal bas för \mathcal{H} och $u = \sum_1^\infty c_k \varphi_k$ så

$$\|u\|^2 = \sum_{k=1}^\infty |c_k|^2 \|\varphi_k\|^2.$$

En operator \mathcal{A} har **egenfunktionen** φ med **egenvärdet** λ om $\mathcal{A}\varphi = \lambda\varphi$, $\varphi \neq 0$ och $\varphi \in D_{\mathcal{A}}$.

En operator \mathcal{A} är **symmetrisk** om $(\mathcal{A}u | v) = (u | \mathcal{A}v)$ för alla $u, v \in D_{\mathcal{A}}$.

En symmetrisk operator har **reella egenvärden** och egenfunktioner hörande till **olika** egenvärden är **ortogonala**.

\mathcal{A} är **positivt semidefinit** om $(\mathcal{A}u | u) \geq 0$ för alla $u \in D_{\mathcal{A}}$, då är alla egenvärden ≥ 0 .

Sturm-Liouvilleoperatorerna: $\mathcal{A}u = \frac{1}{w}(-(pu')' + qu)$, där $w, p > 0, q \geq 0$, med homogena randvillkor, av typ $\alpha u + \beta \partial_n u = 0$, där $\alpha, \beta \geq 0$, ej båda = 0, på randen $\partial\Omega$, är symmetriska och positivt semidefinita. Dess egenfunktioner bildar automatiskt en ortogonal bas i $L_2(w, \Omega)$. (Observera viktfunktionen.)

För att finna en ortogonal bas av egenfunktioner till en operator i *flera variabler* kan man göra en *variabelseparation* och ett täthetsresonemang som visar att varje $u \in L_2(w, \Omega)$ kan approximeras godtyckligt bra med linjärkombinationer av de separerade egenfunktionerna (se exempel H.27, S.4 och S.6). Härvid uppkommer några endimensionella differentialekvationer som man måste behärska.

Variabelseparation av $-\Delta u = \lambda u$ i polära koordinater (2 dimensioner)

Separationen $u(r, \theta) = R(r) \Theta(\theta)$ i $-\Delta u = \lambda u$ ger upphov till (se exempel S4):

Θ -ekvationen: $\Theta'' + c\Theta = 0$.

Har man 2π -periodiska randvillkor ($\Theta(\pi) = \Theta(-\pi)$, $\Theta'(\pi) = \Theta'(-\pi)$) finns icke-triviala lösningar om och endast om $c = n^2$ där $n = 0, 1, 2, \dots$. Dessa är $\{\cos(n\theta), \sin(n\theta)\}_0^\infty$ eller $\{e^{in\theta}\}_{-\infty}^\infty$. I detta fall är egenvärdena dubbla om $n \neq 0$ (se exempel H.25).

R -ekvationen:

$$R'' + \frac{1}{r}R' + \left(\lambda - \frac{n^2}{r^2}\right)R = 0 \iff R(r) = \begin{cases} aJ_n(r\sqrt{\lambda}) + bY_n(r\sqrt{\lambda}) & \text{om } \lambda > 0, \\ a r^n + b r^{-n} & \text{om } \lambda = 0, n \neq 0, \\ a \ln r + b & \text{om } n = \lambda = 0. \end{cases}$$

I Sturm-Liouvilleform kan R -ekvationen skrivas $\frac{1}{r}(-(rR)') + \frac{n^2}{r}R = \lambda R$ med $w = r$.

Variabelseparation i $-\Delta u = \lambda u$ i sfäriska koordinater (3 dimensioner)

Separationen $u(r, s, \phi) = R(r) S(s) \Phi(\phi)$, där $s = \cos \theta$ av $-\Delta u = \lambda u$ ger upphov till (se exempel S.6):

Φ -ekvationen:

$$\Phi'' + d\Phi = 0$$

som för 2π -periodiska randvillkor har lösningarna $\{\cos(m\theta), \sin(m\theta)\}_{m=0}^{\infty}$ med $d = m^2$ där $m = 0, 1, 2, \dots$

S -ekvationen:

$$\left((1-s^2)S'\right)' + (\ell(\ell+1) - \frac{m^2}{1-s^2})S = 0$$

med lösningarna

$$S(s) = a P_{\ell}^m(s) + b Q_{\ell}^m(s), \quad \ell = 0, 1, 2, \dots, m = 0 \dots \ell.$$

(I kvantmekaniken används $m = -\ell \dots \ell$ eftersom man där har exponentiell framställning av ϕ -funktionerna.)

R -ekvationen:

$$R'' + \frac{2}{r}R' + \left(\lambda - \frac{\ell(\ell+1)}{r^2}\right)R = 0 \iff R(r) = \begin{cases} ar^{\ell} + br^{-\ell-1} & \text{om } \lambda = 0, \ell = 0, 1, 2, \dots \\ a j_{\ell}(r\sqrt{\lambda}) + b y_{\ell}(r\sqrt{\lambda}) & \text{om } \lambda > 0, \ell = 0, 1, 2, \dots \end{cases}$$

I Sturm-Liouvilleform kan R -ekvationen skrivas $\frac{1}{r^2}(-(r^2R)') + \ell(\ell+1)R = \lambda R$ med $w = r^2$.

Integraltransformer, integralformler, greenfunktioner

Värmeledning, diffusion på \mathbb{R}

Kan lösas med fouriertransform (eller laplacetransform) i x -led.

För problemet

$$\begin{cases} u'_t - a u''_{xx} = 0, & x \in \mathbb{R}, t > 0, \\ u(x, 0) = g(x), & u \text{ begränsad (tempererad)} \end{cases}$$

kan lösningen direkt skrivas med formeln

$$u(x, t) = \int_{-\infty}^{\infty} G(x - \alpha, t) g(\alpha) d\alpha = G * g(x, t)$$

där $G(x, t) = e^{-x^2/4at} / \sqrt{4\pi at}$ är **greenfunktionen** för värmeledning.

Lösningarna innehåller ofta $\operatorname{erf}(x) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^x e^{-y^2} dy$ (spec är $\operatorname{erf}(\infty) = 1$). Här är $\operatorname{erf}(x)$ en primitiv funktion till $\frac{2}{\sqrt{\pi}} e^{-x^2}$ och således är $\int_a^b e^{-y^2} dy = \frac{\sqrt{\pi}}{2} (\operatorname{erf}(b) - \operatorname{erf}(a))$.

Halvöändliga områden

Problem på *halvöändliga områden* ($x \geq 0$) kan utvidgas till hela \mathbb{R} med hjälp av speglingar. Gör en udda spegling om $u(0, t)$ är given (*dirichletvillkor*) och jämn spegling om $u_x(0, t)$ är given (*neumannvillkor*). För beräkning av derivator med avseende på x används (se avsnitt D.II i boken) $(u^-)''_{xx} = (u''_{xx})^- + 2u(0, t) \delta'$ respektive $(u^+)''_{xx} = (u''_{xx})^+ + 2u'_x(0, t) \delta$. Dessa regler blir speciellt enkla om randvillkoren vid $x = 0$ är homogena ($u(0, t) = 0$ respektive $u'_x(0, t) = 0$). För ickehomogena randvillkor är det därför ofta bra att först homogenisera.

För problem på *ändliga intervall* ($0 \leq x \leq L$) använder man vanligen egenfunksionsutvecklingar, men vissa problem kan också lösas med upprepade speglingar.

Poissons/Laplaces ekvation – $\Delta u = f$

Problem i ett halvplan ($x \in \mathbb{R}, y \geq 0$) kan lösas med fourier(laplace)transform i x -led.

För dirichletproblemet i ett halvplan (med $f = 0$):

$$\begin{cases} u''_{xx} + u''_{yy} = 0, & x \in \mathbb{R}, y > 0, \\ u(x, 0) = g(x), \end{cases}$$

(och u begränsad/tempererad) kan lösningen direkt skrivas med **Poissons integralformel**,

$$u(x, y) = \int_{-\infty}^{\infty} P(x - \alpha, y) g(\alpha) d\alpha = P * g(x, y),$$

där $P(x, y) = y/(\pi(x^2 + y^2))$ är **poissonkärnan** för halvplan.

För motsvarande problem i enhetscirkeln ($\Omega = \{(x, y); x^2 + y^2 < 1\}$) är lösningen

$$u(r, \theta) = \int_{-\pi}^{\pi} P(r, \theta - \alpha) g(\alpha) d\alpha = P * g(r, \theta),$$

där $P(r, \theta) = (1 - r^2)/(2\pi(1 + r^2 - 2r\cos\theta))$ är **poissonkärnan** för enhetscirkeln.

Liknande problem i kvartsplan eller halvcirkel ($x > 0$) kan utvidgas till halvplan respektive cirkel med hjälp av spegling (av g och u), udda om $u(0, y)$ är given och jämn om $u'_x(0, y)$ är given.

För det allmännare problemet (dirichletproblemet för laplaceoperatoren på Ω),

$$\begin{cases} -\Delta u = f & \text{i } \Omega, \\ u = g & \text{på } \partial\Omega, \end{cases}$$

kan lösningen skrivas med hjälp av **greenfunktionen** $G(x; \alpha)$ för dirichletproblemet på Ω

$$u(x) = \int_{\Omega} G(x; \alpha) f(\alpha) d\alpha - \oint_{\partial\Omega} \frac{\partial G}{\partial \mathbf{n}_{\alpha}}(x; \alpha) g(\alpha) dS_{\alpha}.$$

Svårigheten är att bestämma greenfunktionen $G(x; \alpha)$ som är lösningen till

$$\begin{cases} -\Delta u = \delta_{\alpha} & \text{i } \Omega, \\ u = 0 & \text{på } \partial\Omega. \end{cases}$$

Beräkning av greenfunktionen $G(x, \alpha)$ för några enkla områden Ω .

1. För $\Omega = \mathbb{R}^n$ är greenfunktionen $G(x; \alpha) = K(x - \alpha)$, där $K(x)$ är **fundamentallösning** till laplaceoperatoren ($-\Delta K = \delta_0$). För $\Omega = \mathbb{R}^2$ eller \mathbb{R}^3 finns fundamentallösningarna på formelbladet.
2. För $\Omega =$ halvplan eller halvrum spegla udda och använd punkt 1. Greenfunktionen är $G(x; \alpha) = K(x - \alpha) - K(x - \tilde{\alpha})$, där $\tilde{\alpha}$ är spegelpunkt till α .
För kvartsplan spegla först i ena axeln sen i den andra (totalt 4 punkter).
3. Om Ω är cirkelskivan eller klotet $|x| < \rho$ spegla udda i cirkeln och använd fundamentallösningar. Greenfunktionen är $G(x; \alpha) = K(x - \alpha) - K(C(x - \tilde{\alpha}))$, där $\tilde{\alpha}$ är konjugerad punkt (se boken kap 5.5) till α och konstanten $C = |\alpha|/\rho$ är vald så att $G = 0$ på randen $\partial\Omega$.

Kommentarer: För begränsade områden kan greenfunktioner bestämmas med egenfunktionsutvecklingar.

För halvplan/halvrum med homogena neumannvillkor kan man använda jämna speglingar.

Vågekvationen

Den homogena endimensionella vågekvationen $u''_{tt} - c^2 u''_{xx} = 0$ har alltid den allmänna lösningen $u(x, t) = \varphi(x - ct) + \psi(x + ct)$. Svårigheten är att hitta lösningar som uppfyller givna begynnelse- och randvillkor.

Vågekvationen på \mathbb{R} kan lösas med laplace- eller fouriertransformation i x -led.

För problemet

$$\begin{cases} u''_{tt} - c^2 u''_{xx} = 0, & x \in \mathbb{R}, t > 0, \\ u(x, 0) = g(x), & x \in \mathbb{R}, \\ u'_t(x, 0) = b(x), & x \in \mathbb{R}, \end{cases}$$

(u dessutom begränsad/tempererad) kan lösningen direkt skrivas med **d'Alemberts formel**

$$u(x, t) = \frac{1}{2}(g(x - ct) + g(x + ct)) + \frac{1}{2c} \int_{x-ct}^{x+ct} b(y) dy.$$

Problem på *halvoändliga områden* ($x \geq 0$), t ex svängande halvoändlig sträng, kan utvidgas till hela \mathbb{R} med hjälp av speglingar. Udda spegling om $u(0, t) = 0$ (fast inspänd ände) och jämn spegling om $u'_x(0, t) = 0$ (lös ände).

Lösningarna kan också (i enkla fall) konstrueras med geometriska resonemang, fortskridande vågor, reflektion i ändpunkter (speglingar).

För problem på *ändliga intervall* (som $0 \leq x \leq L$) använder man vanligen egenfunktionsutvecklingar, men man kan också använda med upprepade speglingar.

Kvasilinjära ekvationer av 1:a ordningen

För området \mathbb{R} blir lösningarna enklast för vågekvationen eftersom begynnelsevärdena sprids längs linjerna $y = x - ct$ och $y = x + ct$. Dessa kallas **karaktéristiska linjer**. Metoden att bestämma **karaktéristiska kurvor**, kurvor längs vilka begynnelsevärden sprids, kan användas till att lösa 1:a ordningens **kvasilinjära ekvationer**, dvs ekvationer som på \mathbb{R}^2 kan skrivas

$$\begin{cases} \alpha(x, y, u) u'_x + \beta(x, y, u) u'_y = f(x, y, u), \\ u(x_0, y_0) = u_0(x_0, y_0), \end{cases} \quad \text{för } g(x_0, y_0) = 0.$$

Problemet reduceras till ett system av ODE

$$\begin{cases} \dot{x} = \alpha(x, y, z), & x(0) = x_0, \\ \dot{y} = \beta(x, y, z), & y(0) = y_0, \\ \dot{z} = f(x, y, z), & z(0) = u_0(x_0, y_0). \end{cases}$$

Om s är en parameter för kurvan $g(x_0, y_0) = 0$ så kommer lösningen till systemet bli funktioner av (t, s) som man kan se som nya koordinater istället för (x, y) . Löser man ut (s, t) ur ekvationerna $x(s, t) = x, y(s, t) = y$ och sätter in i $z(t, s)$ får man lösningen $u(x, y)$.

Distributioner

Används inte så mycket i kursen men finns med för att visa att det finns ett sätt att ge ett ramverk där räkningar med Diracs deltafunktion δ (det finns ingen *funktion* med de egenskaper som δ har) blir riktiga. Det kräver ett nytt betraktelse sätt där istället för att beskriva en funktion genom dess verkan på punkter x i en mängd Ω man ger funktionens verkan på testfunktioner. **Stöd** av funktion f är mängden $\{x \in \mathbb{R}; f(x) \neq 0\} + \text{rand}$.

Testfunktioner är mängden $\mathcal{D} = C_0^\infty(\mathbb{R})$ av oändligt deriverbara funktioner φ på \mathbb{R} som är 0 utanför en begränsad delmängd (kallas **kompakt stödda**).

Distributioner \mathcal{D}' är avbildningar $C_0^\infty(\mathbb{R}) \rightarrow \mathbb{R}$ som är kontinuerliga och linjära. Kontinuerlig innebär att om $\varphi_k \rightarrow 0$ så gäller $U(\varphi_k) \rightarrow 0$ (då $k \rightarrow \infty$), men där definitionen av att $\varphi_k \rightarrow 0$ är rätt teknisk. Exempelvis definieras **Diracs deltafunktion** av $\delta(\varphi) = \varphi(0)$ för alla $\varphi \in C_0^\infty(\mathbb{R})$. Två distributioner $U, V \in \mathcal{D}'$ sägs vara lika om $U(\varphi) = V(\varphi)$ för alla $\varphi \in C_0^\infty(\mathbb{R})$.

Man kan inte prata om värdet av en distribution i enskilda punkter, t ex säga att $U = 0$ i $x = 1$ men man kan säga att $U = 0$ på öppna mängder. **Stöd av distribution** U är den minsta slutna mängd Ω sån att $U(\varphi) = 0$ för alla testfunktioner φ med stöd i $\mathbb{C}\Omega$.

Det finns varianter av definitionen med andra, större mängder av testfunktioner nämligen mängden $\mathcal{S} = \{\varphi \in C^\infty(\mathbb{R}); x^k \partial^m \varphi \text{ begränsad för alla } k, m \geq 0\}$ som ger de tempererade distributionerna \mathcal{S}' och mängden $\mathcal{E} = C^\infty(\mathbb{R})$ som ger distributioner med kompakt stöd \mathcal{E}' . Nästan alla användbara funktioner, mer precist alla lokalt integrerbara f som innefattar alla kontinuerliga, kan identifieras med en distribution genom

$$U_f(\varphi) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x)\varphi(x) dx.$$

En följd av distributioner U_n sägs konvergera mot distributionen U om $U_k(\varphi) \rightarrow U(\varphi)$ för varje testfunktion φ .

Räkne regler för distributioner motiveras oftast med att man formulerar om vad som gäller för lämpliga, vanliga funktioner på ett sätt som går att använda på distributioner. Till exempel gäller för en deriverbar funktion f att $\int f'(x)\varphi(x) dx = -\int f(x)\varphi'(x) dx$ för alla testfunktioner φ eftersom φ alltid är deriverbar och har kompakt stöd. Detta ger definitionen av **derivata av distribution** genom $U'(\varphi) = -U(\varphi')$. Följden blir att varje distribution blir **deriverbar i distributionsmening** (i motsats till klassiskt deriverbar) och dessutom oändligt många gånger deriverbar.

Produkt med glatt funktion $g \in C^\infty(\mathbb{R})$ ges av $(gU)(\varphi) = U(g\varphi)$.

Fouriertransform kan för tempererade distributioner $U \in \mathcal{S}'$ definieras av $\widehat{U}(\varphi) = U(\widehat{\varphi})$ och man får den viktiga transformen $\widehat{\delta} = 1$.

Faltning går också att definiera och man får sambandet $\delta * U = U$.